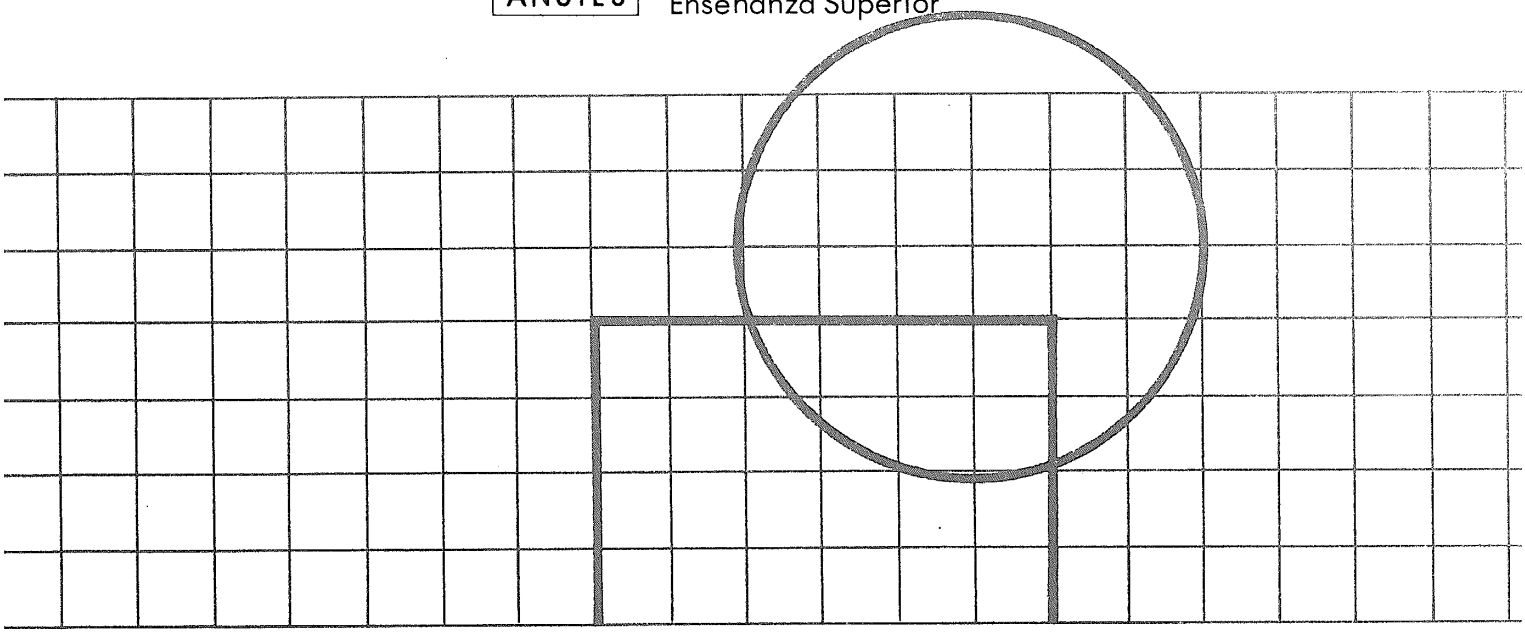
ALGUNAS APLICACIONES DEL CÁLCULO INTEGRAL

Obras que integran el bloque 8 *(Cálculo integral):*

1- Sumatoria y notación
2- La integral definida y la integral indefinida
3- Integrales elementales
4- Métodos de integración 1
5- Métodos de integración 2
6- Algunas aplicaciones del cálculo integral

ANUIES

Asociación Nacional
de Universidades e Institutos de
Enseñanza Superior



Módulos de matemáticas

Bloque 8
Cálculo integral

Módulo 6

ALGUNAS APLICACIONES DEL CÁLCULO INTEGRAL

Conrado Flores García

EDITORIAL TRILLAS

México, Argentina, Colombia, España,
Puerto Rico, Venezuela

La presentación y disposición en conjunto de
ALGUNAS APLICACIONES DEL CÁLCULO INTEGRAL
son propiedad del editor. Ninguna parte de esta obra
puede ser reproducida o trasmitida, mediante ningún sistema
o método, electrónico o mecánico (incluyendo el fotocopiado,
la grabación o cualquier sistema de recuperación y almacenamiento
de información), sin consentimiento por escrito del editor

Derechos reservados
© 1984, Editorial Trillas, S. A. de C. V.
Av. Río Churubusco 385, Col. Pedro María Anaya
Deleg. Benito Juárez, 03340, México, D. F.

Miembro de la Cámara Nacional de la
Industria Editorial. Reg. núm. 158

Primera edición, septiembre 1984
ISBN 968-24-1437-7

Impreso en México

PRESENTACIÓN

Descripción general de la serie

Para la elaboración de los textos que componen la serie MÓDULOS DE MATEMÁTICAS se tomaron en cuenta los objetivos de los programas de estudio de un gran número de instituciones de enseñanza media superior.

La serie consta de 64 módulos didácticos agrupados en 8 bloques, a saber:

1. Álgebra. Estructuras y operaciones.
2. Álgebra. Modelos.
3. Nociones de lógica matemática.
4. Geometría euclidiana.
5. Trigonometría.
6. Geometría analítica.
7. Cálculo diferencial.
8. Cálculo integral.

Cada bloque se complementa con un compendio de la información contenida en los módulos didácticos que lo forman y al cual hemos dado el nombre de MEMO, ya que es una ayuda a la *memo*ria, al entusiasmo y al esfuerzo.

Por otra parte, cada módulo contiene una sucesión de cuadros de aprendizaje, los cuales están organizados en cierto número de submódulos (capítulos); en los que se presenta la información en orden creciente de complejidad. En atención a su fin, hemos designado a los cuadros con los nombres: *informativos, de pregunta* y *de respuesta.* Asimismo, se presentan cuadros complementarios para efectuar, si es necesario, ejercicios o prácticas adicionales.

Sugerencias a los lectores

Los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS están dirigidos a diferentes clases de lectores: los profesores de enseñanza media superior, los estudiantes inscritos en cursos escolarizados de este nivel, estudiantes autodidactas y, en general, personas que deseen actualizar sus conocimientos en este campo.

En lo que respecta a los profesores, éstos pueden usar los módulos como parte integrante de sus guiones de clase; para tal efecto, deben revisar el programa correspondiente y advertir en qué parte puede incorporarse tal o cual módulo, ya que los textos están basados en un gran número de programas y no en uno solo. Al seleccionar los módulos que correspondan al curso planeado, éste quedará dividido en tareas de aprendizaje. El dominio de cada módulo quedará determinado por la consecución de los objetivos específicos.

En relación con los estudiantes inscritos en cursos escolarizados, los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS pueden servirles como material complementario y como una posibilidad de desarrollar los ejercicios que se revisan en el aula.

Los estudiantes autodidactas notarán que cada uno de los textos es un "escalón numerado" que debe seguirse con precisión para poder acceder al siguiente. Los cuadros informativos, los de pregunta y los de respuesta son las partes fundamentales de cada peldaño. En los cuadros informativos se presentan los aspectos que deben ser estudiados con sumo cuidado. Dichos cuadros se destacan con el símbolo , el cual indica que se les debe prestar atención especial. Los cuadros de pregunta brindan el espacio suficiente para anotar la respuesta correspondiente, la cual puede ser verificada en los cuadros de respuesta que están situados justo al lado del cuadro de pregunta (para tal efecto, es conveniente tapar el cuadro de respuesta durante la elaboración de la misma, a fin de poder comprobar el resultado que se obtenga).

El alumno logrará el dominio de cada uno de los módulos mediante la consecución de los objetivos anotados al final de cada submódulo. Dichos objetivos indican lo que el estudiante debe ser capaz de hacer al terminar de examinar cada etapa: sólo si se han cumplido los objetivos deberá pasarse al siguiente módulo.

Respecto a las personas que quieren actualizar sus conocimientos en el campo de las matemáticas, es necesario que estudien los módulos desde el comienzo (a manera de repaso), ya que de esta manera se evitará que algún tema quede poco claro debido a la falta de conocimiento de aquéllos que lo fundamentan. Para ello, se ha incluido una lista de prerrequisitos que deben cumplirse para poder entender determinados temas.

Cabe señalar que la mencionada lista de prerrequisitos, comprende aquellos puntos que son útiles para todos los tipos de lectores, pues se especifican los conocimientos que deben tenerse para poder comprender y asimilar mejor el contenido del módulo en cuestión.

Una última observación: las metas sólo se logran cuando el esfuerzo por alcanzarlas se fundamenta en el agrado, el entusiasmo y la motivación, en el caso de los alumnos, y en la planeación adecuada y la exposición convincente, en lo que respecta a los profesores.

CONRADO FLORES GARCÍA

ÍNDICE DE CONTENIDO

Presentación

Objetivos, esquema estructural y prerrequisitos

6.1 Integración indefinida

6.2 Áreas de figuras planas

6.3 Volumen de sólidos de revolución

6.4 Volumen de sólidos de sección transversal dada

6.5 Momento y centro geométrico

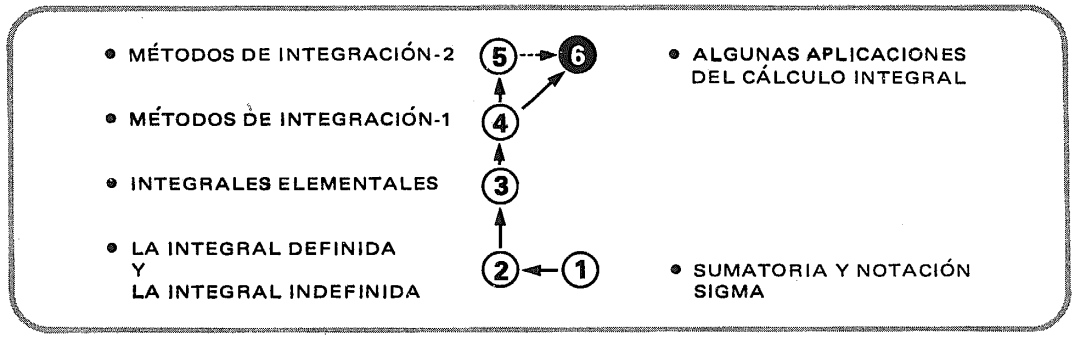
6.6 Temas adicionales de estudio

OBJETIVOS, ESQUEMA ESTRUCTURAL Y PRERREQUISITOS

Bloque 8. Cálculo integral

Objetivos: integrar algunas funciones algebraicas o trascendentes, y aplicar los procedimientos correspondientes a la resolución de problemas prácticos

Esquema estructural del bloque 8



Módulo 6. Algunas aplicaciones del cálculo integral

Objetivos: aplicar los procedimientos de integración a la resolución de problemas prácticos

Prerrequisitos:	Bloque	Módulo(s)
• Nociones de la teoría de conjuntos	1	1
• Manejo de expresiones algebraicas		
– enteras	1	7, 8, 9
– racionales	1	11
– reales	1	13
• Manejo de expresiones exponenciales o logarítmicas	2	9, 10
• Conceptos geométricos básicos	4	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
• Manejo de expresiones trigonométricas	5	1, 3, 4, 5, 6, 8
• Conceptos básicos de la geometría analítica	6	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
• Conceptos básicos del cálculo diferencial	7	1, 2, 3, 4, 5, 6
• Integración de funciones algebraicas o trascendentes	8	1, 2, 3, 4, 5

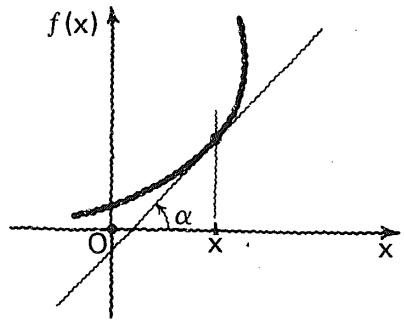
6.1

Integración indefinida

1

Hemos visto que si
tenemos una función
$\mathbf{y = f(x)}$
su primera derivada
$f'(x)$ o $\dfrac{dy}{dx}$ representa
la "pendiente de la curva f
en un punto de abscisa x".

$$\mathbf{m = \frac{dy}{dx} = \tan \alpha}$$



2

Inversamente,
si conocemos la pendiente en un punto de
abscisa x y está dada por

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

podemos encontrar, por integración, la ecuación
de una **familia de curvas.**

3

Veamos:

- $\frac{dy}{dx} = f'(x)$
- $dy =$ ⌊_____⌋
- $y =$ ⌊_____⌋

$f'(x)\,dx$

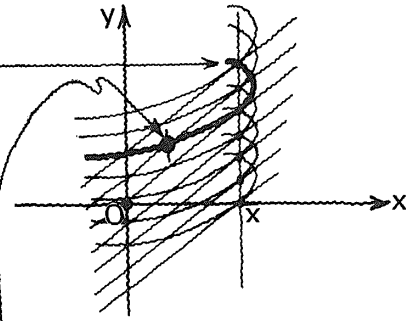
$\int f'(x)\,dx = \phi(x) + C$

4

$y = \phi(x) + C$

Para determinar la ecuación de una curva particular es necesario conocer el valor numérico de la constante de integración (C).

Esto lo podemos lograr si conocemos un punto perteneciente a la curva.



5

Por ejemplo,

Si sabemos
①que la pendiente de una curva en un punto cualquiera de abscisa x está dada por la expresión:

$m(x) = 5x$

y②que la curva pasa por el punto **(1, 2)**, determinar su ecuación

6

$\frac{dy}{dx} =$ ⌊ ⌋

$dy =$ ⌊ ⌋

$y =$ ⌊ ⌋ ← ecuación de la familia de curvas que satisfacen la condición 1

$5x$

$5x\,dx$

$\int 5x\,dx = \frac{5x^2}{2} + C$

7

Ecuación de la familia de curvas cuya pendiente en un punto cualquiera de abscisa x está dada por

$f'(x) = 5x.$

Como sabemos que la curva pasa por el punto (1, 2), podemos calcular el valor de C...

$y = \frac{5x^2}{2} + C$

$2 = \frac{5(1)^2}{2} + C = \frac{5}{2} + C$

$C = 2 - \frac{5}{2}$

$C =$ ⌊ ⌋

$-\frac{1}{2}$

y por lo tanto, la ecuación de la curva que satisface las dos condiciones 1 y 2, es

$y = \frac{5x^2}{2} - \frac{1}{2}$

8

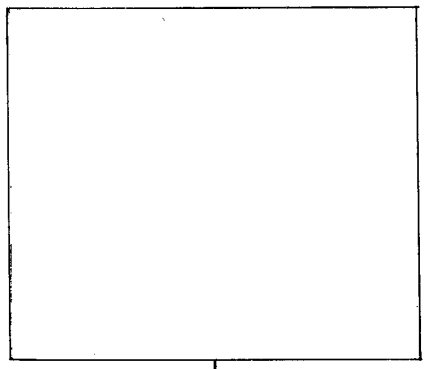
Dar la ecuación de una curva cuya pendiente en un punto cualquiera, de abscisa x está dada por la expresión

$$-\frac{x}{y}$$

y que pasa por el punto (4, 0)

9

Ecuación de la familia de curvas que satisface la primera condición



Atención.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

$$y\,dy = -x\,dx$$

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C_1$$

$$y^2 = -x^2 + C$$

$$\mathbf{x^2 + y^2 = C}$$

10

Ecuación de la familia de curvas cuya pendiente en un punto cualquiera (x, y)

es $-\frac{x}{y}$ → $\mathbf{x^2 + y^2 = C}$

Podemos reconocer esta ecuación como perteneciente a una familia de

circunferencias concéntricas con centro en el origen

11

Ecuación de una familia de circunferencias concéntricas con centro en el origen. → $\mathbf{x^2 + y^2 = C}$

Ecuación de la circunferencia con centro en el origen que pasa por el punto (4, 0)

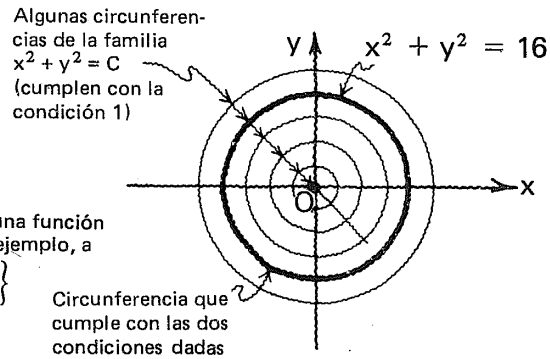
$$(4)^2 + (0)^2 = C$$

$$C = 16$$

$$\mathbf{x^2 + y^2 = 16}$$

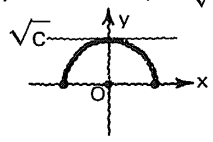
12

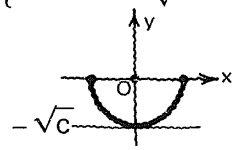
Veamos esto gráficamente:



* Debemos hacer notar que la ecuación $x^2 + y^2 = C$ no corresponde a una función sino a una relación cualquiera, a menos que restrinjamos su rango, por ejemplo, a

$\{y | y \in \mathbb{R} \wedge 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{C}\}$ o a $\{y | y \in \mathbb{R} \wedge -\sqrt{C} \leqslant y \leqslant 0\}$





13

Ahora vamos a suponer que la segunda derivada de una función f está dada por

$$f''(x) = 3x + 2$$

Por integración, podemos encontrar que

$$f'(x) = \square$$

Estudiar con atención.

$$\frac{d[f'(x)]}{dx} = 3x + 2$$

$$d[f'(x)] = (3x + 2)\,dx$$

$$\int d[f'(x)] = \int (3x + 2)\,dx$$

$$f'(x) = \frac{3x^2}{2} + 2x + C_1$$

$$\frac{3x^2}{2} + 2x + C_1$$

14

$$f''(x) = 3x + 2$$

$$f'(x) = \frac{3x^2}{2} + 2x + C_1$$

Si conocemos el valor de f' para un cierto valor de x, podemos determinar la constante C_1.

Sea, por ejemplo,

$$f'(0) = 2$$

entonces: $C_1 = \square$

y $f'(x) = \square$

$$2 = \frac{3\,(0)^2}{2} + 2\,(0) + C_1$$

$$2 = C_1$$

2

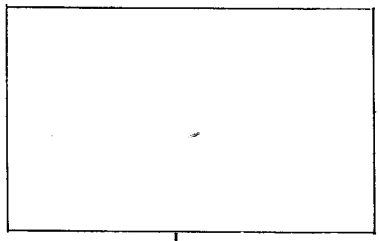
$$\frac{3x^2}{2} + 2x + 2$$

15

$$f''(x) = 3x + 2$$

$$f'(x) = \frac{3x^2}{2} + 2x + 2$$

Por medio de una nueva integración podemos obtener



$f(x) =$ ⌊ ⌋

☞ Sigamos estudiando con atención.

$$\frac{d[f(x)]}{dx} = \frac{3x^2}{2} + 2x + 2$$

$$d[f(x)] = \left(\frac{3x^2}{2} + 2x + 2\right) dx$$

$$\int d[f(x)] = \int \left(\frac{3x^2}{2} + 2x + 2\right) dx$$

$$f(x) = \frac{x^3}{2} + x^2 + 2x + C_2$$

$$\frac{x^3}{2} + x^2 + 2x + C_2$$

16

$$f''(x) = 3x + 2$$

$$f'(x) = \frac{3x^2}{2} + 2x + 2$$

$$f(x) = \frac{x^3}{2} + x^2 + 2x + C_2$$

Si, finalmente, sabemos el valor de f para un cierto valor de x, podemos conocer C_2

Por ejemplo:

Si $f(0) = 5$ $\quad C_2 =$ ⌊ ⌋

y $f(x) =$ ⌊ ⌋

$$5 = \frac{(0)^3}{2} + (0)^2 + 2(0) + C_2$$

$$5 = C_2$$

5

$$\frac{x^3}{2} + x^2 + 2x + 5$$

17

☞ Estudiar con atención este cuadro y el siguiente.

Datos $\begin{cases} f''(x) = 3x + 2 \\ f'(0) = 2 \quad f(0) = 5 \end{cases}$

Por integración obtenemos ➡ $f'(x) = \frac{3x^2}{2} + 2x + C_1$

Sabiendo que $f'(0) = 2$

calculemos ➡ $C_1 = 2$

por lo que ➡ $f'(x) = \frac{3x^2}{2} + 2x + 2$

18

Por una nueva integración obtenemos $\longrightarrow f(x) = \frac{x^3}{2} + x^2 + 2x + C_2$

Sabiendo que $f(0) = 5$

calculamos $\longrightarrow C_2 = 5$

y finalmente tenemos $\longrightarrow f(x) = \frac{x^3}{2} + x^2 + 2x + 5$

19

Este procedimiento para determinar la regla de correspondencia de una función a partir de la expresión dada de alguna de sus derivadas, puede ser aplicado a una gran variedad de problemas.

20

En un módulo anterior hemos estudiado que:

la naturaleza del movimiento de un cuerpo que se desplaza a lo largo de una recta, puede definirse por medio de una ecuación de la forma:

$$s = f(t)$$

en que s es la distancia dirigida a un punto de referencia en la recta, al cabo de t unidades de tiempo.

21

Supongamos que:

$$s = 3t^3 + 5t - 8$$

es la ecuación de movimiento de un cierto cuerpo.

Sabemos que:

la primera derivada $\longrightarrow s'(t) = \frac{ds}{dt}$

representa la **velocidad instantánea** del móvil al cabo de t unidades de tiempo

Para nuestro caso:

$$v = \frac{ds}{dt} = \boxed{\qquad\qquad}$$

$9t^2 + 5$

22

$$s = 3t^3 + 5t - 8$$

$$v = \frac{ds}{dt} = 9t^2 + 5$$

También sabemos que:

la derivada $\frac{dv}{dt}$ o $s''(t) = \frac{d^2s}{dt^2}$

representa $\boxed{\qquad\qquad}$

la aceleración instantánea del móvil al cabo de t unidades de tiempo

23

$$s = 3t^3 + 5t - 8$$

$$v = \frac{ds}{dt} = 9t^2 + 5$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = \boxed{\qquad}$$

18t

24

$$s = 3t^3 + 5t - 8$$

$$v = \frac{ds}{dt} = 9t^2 + 5$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = 18t$$

Observamos que:

para $t = 0$ $\quad v =$ [ ]

y para $t = 0$ $\quad s =$ [ ]

5

-8

25

Procedamos, ahora, en sentido inverso.

La aceleración de un cuerpo que se mueve en línea recta está dada por:

$$\mathbf{a = 18t}$$

y sabemos que:

$$\left.\begin{array}{ll} v = 5 \text{ m/seg} & \text{para } t = 0 \text{ seg} \\ \text{y} & \\ s = -8 \text{ m} & \text{para } t = 0 \text{ seg} \end{array}\right\} *$$

Se necesita conocer la ecuación de movimiento del cuerpo.

* Estos datos suelen recibir el nombre de "condiciones iniciales".

26

$$a = \frac{d(v)}{dt} = \text{[ ]}$$

[ ]

$v =$ [ ]

18t

$dv = 18t\,dt$

$$\int dv = \int 18t\,dt$$

$$v = \frac{9t^2}{2} + C_1$$

Como $v = 5$ cuando $t = 0$

$$5 = \frac{9(0)^2}{2} + C_1$$

$C_1 = 5$

$$\mathbf{v = \frac{9t^2}{2} + 5}$$

27

$a = 18t$

$v = \dfrac{9t^2}{2} + 5$

$s =$ ⌊ ⌋

$v = \dfrac{ds}{dt} = 9t^2 + 5$

$ds = (9t^2 + 5)dt$

$\int ds = \int (9t^2 + 5)\,dt$

$s = 3t^3 + 5t + C_2$

Como $s = -8$ cuando $t = 0$

$-8 = 3(0)^3 + 5(0) + C_2$

$\therefore\ C_2 = -8$

$s = 3t^3 + 5t - 8$

28

Expresión de partida: $a = 18t$

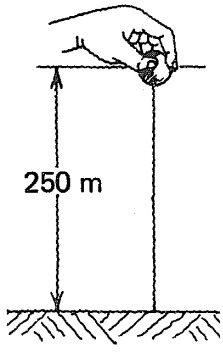
↓

$v = \dfrac{9t^2}{2} + 5$

Ecuación de movimiento requerida: ↓ **$s = 3t^3 + 5t - 8$**

29

Desde una altura de 250 m se deja caer un objeto.
Se requiere saber cuánto tiempo tardará en llegar al suelo y con qué velocidad.
La aceleración de la gravedad puede considerarse igual a 9.81 m/seg/seg.

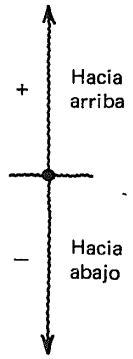


30

Si llamamos **g** a la aceleración de la gravedad, podemos escribir:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \boxed{\quad}$$

de acuerdo con esta convención de signos para la dirección del movimiento



$-g$

31

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -g \quad \text{o} \quad \frac{dv}{dt} = -g$$

$v = \boxed{\quad}$

$$\frac{dv}{dt} = -g$$

$$dv = -g\,dt$$

$$\int dv = -g \int dt$$

$$-gt + C_1$$

32

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = -g$$

$$v = -gt + C_1$$

Puesto que el objeto es dejado caer libremente:

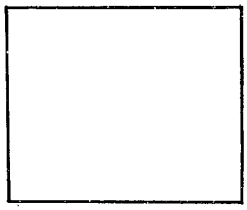
para $t = 0$ $\quad v_0 = \boxed{\quad}$

0

33

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = -g$$

$$v = -gt + C_1$$



$C_1 =$ ⌊_____⌋

$0 = -g(0) + C_1$

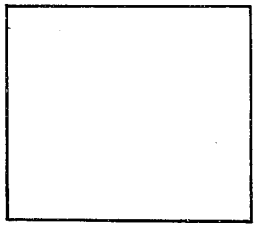
$C_1 = 0$

0

34

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = -g$$

$$v = -gt$$



$s =$ ⌊_____⌋

$$v = \frac{ds}{dt} = -gt$$

$$ds = -gt\,dt$$

$$\int ds = -g \int t\,dt$$

$$s = -\frac{gt^2}{2} + C_2$$

$$-\frac{gt^2}{2} + C_2$$

35

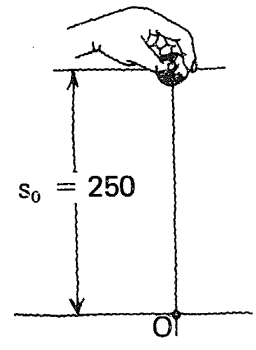
$$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = -g$$

$$v = -gt$$

$$s = -\frac{gt^2}{2} + C_2$$

Si consideramos el punto de referencia (0) al nivel del suelo, tenemos que:

para $t = 0$ $s_0 =$ ⌊_____⌋



250

36

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = -g$$

$$v = -gt$$

$$s = -\frac{gt^2}{2} + C_2$$

$C_2 =$ [ ]

$S =$ [ ]

$$250$$

$$-\frac{gt^2}{2} + 250$$

37

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = -g$$

$$v = -gt$$

Ecuación de movimiento

$$s = 250 - \frac{gt^2}{2}$$

38

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = -g \qquad (1)$$

$$v = -gt \qquad (2)$$

$$s = 250 - \frac{gt^2}{2} \qquad (3)$$

Nos interesa saber el tiempo que tarda el objeto en llegar al suelo, que podemos calcular a partir de la ecuación (3):

[ ]

$t =$ [ ] seg

Para $s = 0$

$$0 = 250 - \frac{gt^2}{2}$$

$$\frac{gt^2}{2} = 250$$

$$t = \sqrt{\frac{500}{g}} = \sqrt{\frac{500}{9.81}} \doteq 7.14 \text{ seg}$$

7.14

39

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = -g \qquad (1)$$

$$v = -gt \qquad (2)$$

$$s = 250 - \frac{gt^2}{2} \qquad (3)$$

¿Con qué velocidad llega el objeto al suelo?

$v =$ ⌊_____⌋ m/seg

De **2** para t = 7.14 seg

v = − 9.81 X 7.14 = − 70.04 m/seg

− 70.04

40

El eje transversal de una viga de **l** metros se flexiona como se muestra en la figura bajo la acción de una carga de w kg/m.

Sabemos que:

la ecuación del eje de la viga flexionada es

$$\frac{d^4y}{dx^4} = -kw$$

Siendo k una constante que depende de las dimensiones y el material de la viga.

$$f'''(0) = \frac{kwl}{2}$$

$$f''(0) = 0$$

$$f'\left(\frac{l}{2}\right) = 0$$

$$f(0) = 0$$

Se requiere: la ecuación del eje de la viga flexionada, en la forma:

$y = f(x)$

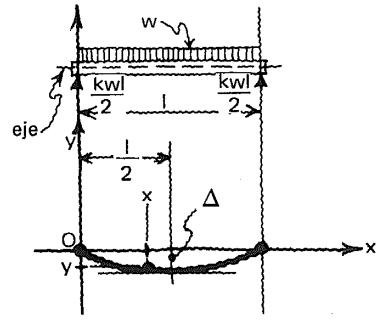
y la deformación (Δ) en el centro de la viga para

w = 6000 kg/m

l = 4 m.

y

$k = 4.6 \times 10^{-11}$



41

$$\frac{d^4y}{dx^4} = -kw$$

Por una primera integración podemos obtener, calculando la constante de integración correspondiente:

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \text{⌊\_\_\_\_\_⌋}$$

$$\frac{d[f'''(x)]}{dx} = -kw$$

$$d[f'''(x)] = -kwdx$$

$$\int d[f'''(x)] = -kw \int dx$$

$$f'''(x) = -kwx + C_1$$

Como $f'''(0) = \frac{kwl}{2}$

$$C_1 = \frac{kwl}{2}$$

por lo tanto:

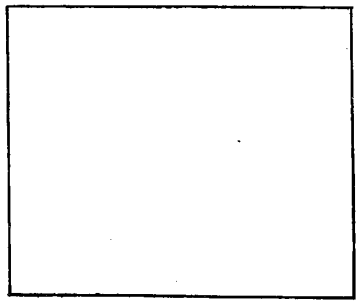
$$f'''(x) = -kwx + \frac{kwl}{2}$$

$$kw\left(\frac{l}{2} - x\right)$$

42

$$f'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3} = kw\left(\frac{l}{2} - x\right)$$

Por segunda integración:



$$\frac{d^2y}{dx^2} = \square$$

$$\frac{d[f''(x)]}{dx} = kw\left(\frac{l}{2} - x\right)$$

$$d[f''(x)] = kw\left(\frac{l}{2} - x\right)dx$$

$$\int d[f''(x)] = kw\int\left(\frac{l}{2} - x\right)dx$$

$$f''(x) = \frac{kwlx}{2} - \frac{kwx^2}{2} + C_2$$

y sabiendo que

$f''(x) = 0$

$C_2 = 0$

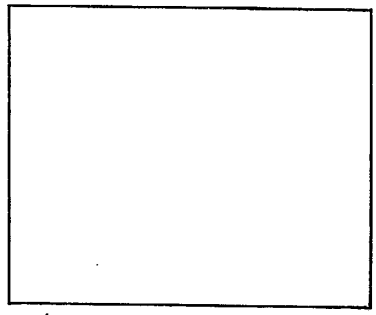
de donde $f''(x) = \frac{kwlx}{2} - \frac{kwx^2}{2}$

$$\frac{kw}{2}(lx - x^2)$$

43

$$f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{kw}{2}(lx - x^2)$$

Integrando por tercera vez:



$$\frac{dy}{dx} = \square$$

$$d[f'(x)] = \frac{kw}{2}(lx - x^2)dx$$

$$\int d[f'(x)] = \frac{kw}{2}\int(lx - x^2)\,dx$$

$$f'(x) = \frac{kwlx^2}{4} - \frac{kwx^3}{6} + C_3$$

Como $f'\left(\frac{l}{2}\right) = 0$

$$0 = \frac{kwl^3}{16} - \frac{kwl^3}{48} + C_3$$

$$C_3 = -\frac{kwl^3}{24}$$

de donde:

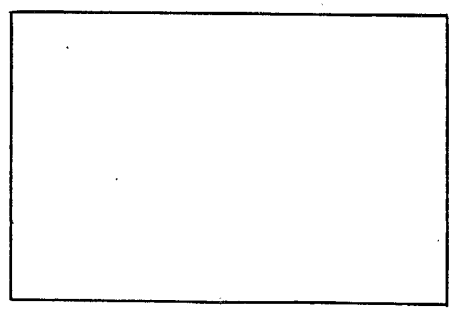
$$f'(x) = \frac{kwlx^2}{4} - \frac{kwx^3}{6} - \frac{kwl^3}{24}$$

$$\frac{kw}{24}(6lx^2 - 4x^3 - l^3)$$

44

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{kw}{24}(6lx^2 - 4x^3 - l^3)$$

Finalmente, integrando por cuarta vez:



$$y = \square$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{kw}{24}(6lx^2 - 4x^3 - l^3)$$

$$dy = \frac{kw}{24}(6lx^2 - 4x^3 - l^3)dx$$

$$\int dy = \frac{kw}{24}\int(6lx^2 - 4x^3 - l^3)\,dx$$

$$y = \frac{kwlx^3}{12} - \frac{kwx^4}{24} - \frac{kwl^3x}{24} + C_4$$

Como $f(0) = 0$

$C_4 = 0$

y

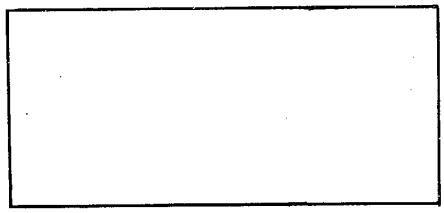
$$y = \frac{kwlx^3}{12} - \frac{kwx^4}{24} - \frac{kwl^3x}{24}$$

$$\frac{kw}{24}(2lx^3 - x^4 - l^3x)$$

45

$$y = \frac{kw}{24}(2lx^3 - x^4 - l^3x)$$

En el centro de la viga, o sea para $x = \frac{l}{2}$:



$\Delta =$ ⌊_____

$$\frac{kw}{24}\left(\frac{l^4}{4} - \frac{l^4}{16} - \frac{l^4}{2}\right)$$

$$\frac{kw}{24}\left(-\frac{5l^4}{16}\right)$$

$$-\frac{5kwl^4}{384}$$

46

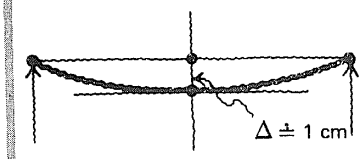
$$\Delta = -\frac{5kwl^4}{384}$$

para $w = 6\,000$ kg/m $= 60$ kg/cm

$l = 4$m $= 400$ cm

$k = 4.6875 \times 10^{-11}$

$\Delta =$ ⌊_____⌋ ← deformación de la viga en el centro



$$\Delta = -\frac{5 \times 4.6875 \times 10^{-11} \times 60 \times 400^4}{384}$$

$\Delta = -0.94$ cm

8.6.1.1

Práctica adicional
de
problemas de aplicación
de
integración indefinida,
si se considera necesario.

8.6.1

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *aplicar* los conocimientos relacionados con el cálculo de integrales indefinidas a la solución de problemas prácticos.

6.2

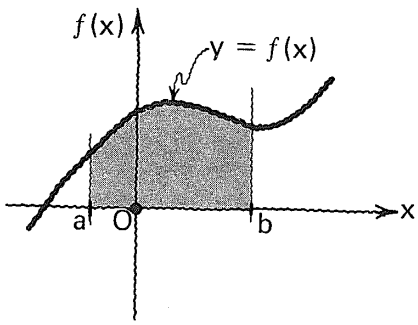
Áreas de figuras planas

47

Hemos visto
cómo la expresión:

$\int_a^b f(x)\,dx$

puede interpretarse
geométricamente
como
el área de la región del plano
limitada por la curva f
las rectas $x = a$, $x = b$
y el eje de las x.

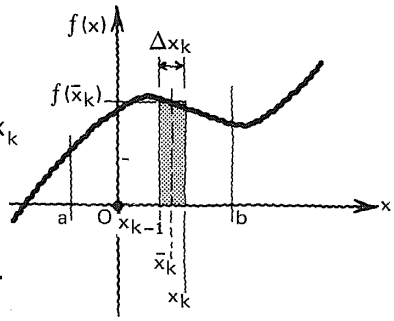


48

Recordemos que:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|\Delta x\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k)\,\Delta x_k$$

Llamaremos **rectángulo genérico**
al que tiene una base igual
a Δx_k y una altura igual a $f(\bar{x}_k)$.



49

De acuerdo con lo anterior, se requiere calcular el área de la región del plano comprendida entre la curva:

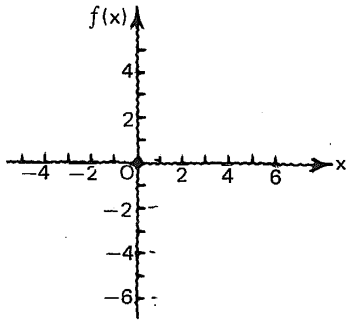
$$f(x) = 4 - x^2$$

y el eje de las x.

50

1. Empezamos por hacer un bosquejo de la curva

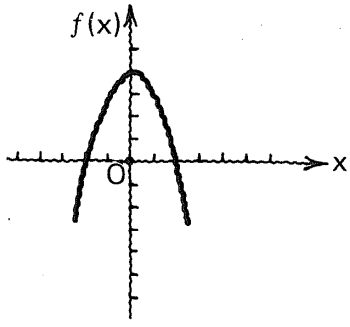
$f(x) = 4 - x^2$



Respuesta en el cuadro siguiente.

51

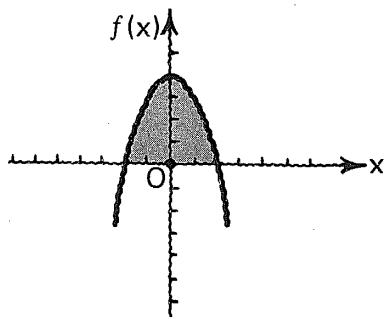
2. Señalamos con ■ el área por determinar



Respuesta en el cuadro siguiente.

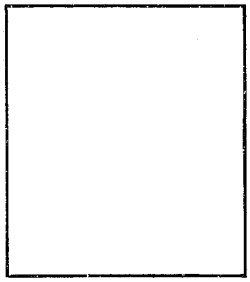
52

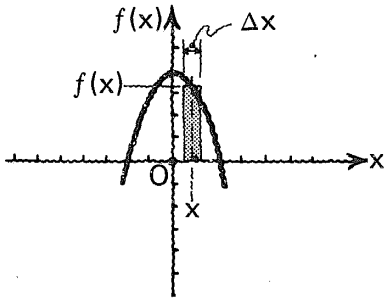
3. Trazamos un rectángulo genérico.



Respuesta en el cuadro siguiente.

4. Determinamos los límites de integración.





límite inferior $a =$ ____

límite superior $b =$ ____

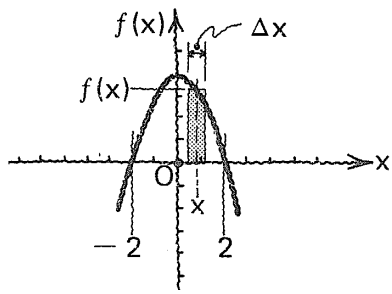
De
$f(x) = 4 - x^2$
para $f(x) = 0$
$0 = 4 - x^2$
de donde
$x = \pm 2$
-2

2

53

5. Evaluamos:

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \int_{-2}^{2} (4 - x^2)\,dx$$



recordando que:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[\int f(x)\,dx\right]_a^b = G(b) - G(a)$$

54

$$\int_{-2}^{2} (4 - x^2)\,dx = $$

$$\left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2}$$

$$\left[4(2) - \frac{(2)^3}{3}\right] - \left[4(-2) - \frac{(-2)^3}{3}\right]$$

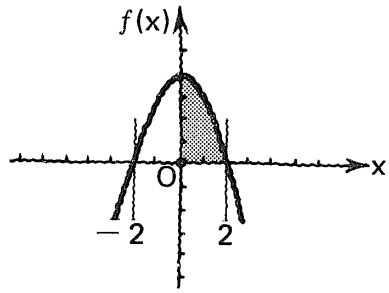
$$\left(8 - \frac{8}{3}\right) - \left(-8 + \frac{8}{3}\right)$$

$$8 - \frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3}$$

$$\frac{32}{3}$$

55

Ahora bien, puesto que la curva f es simétrica con respecto al eje de las y, podemos intuitivamente ver que:



$$\int_{-2}^{2} (4 - x^2)\,dx = 2\int_{0}^{2} (4 - x^2)\,dx$$

56

$$\int_{-2}^{2} (4 - x^2)\,dx = 2\int_{2}^{2} (4 - x^2)\,dx$$

$$2\left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{0}^{2}$$

$$2\left\{\left[4(2) - \frac{(2)^3}{3}\right] - \left[4(0) - \frac{(0)^3}{3}\right]\right\}$$

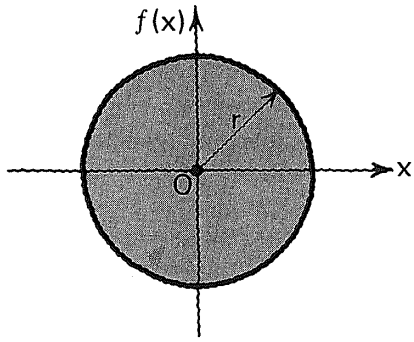
$$2\left(8 - \frac{8}{3}\right)$$

$$2\left(\frac{16}{3}\right)$$

$$\frac{32}{3}$$ resultado igual al antes obtenido

57

Se requiere determinar el área de un círculo de radio r.



58

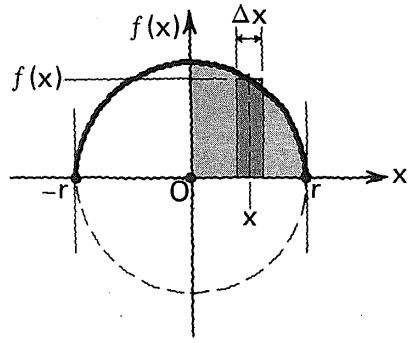
Consideremos la función

$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ $-r \leqslant x \leqslant r$

cuya gráfica se muestra.

De acuerdo con lo sugerido por la figura, el área del círculo estaría dada por:

S = ┌──────────┐



$4\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\, dx$

59

Evaluemos:

$S = 4\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\, dx =$ ┌──────────┐

S = ┌──────────┐

Respuesta en el cuadro siguiente.

- $4\left[\dfrac{x\sqrt{r^2 - x^2}}{2} + \dfrac{r^2}{2}\,\text{Arcsen}\,\dfrac{x}{r}\right]_0^r$
- $4\left[0 + \dfrac{r^2}{2}\,\text{Arcsen}\,1\right] - \left[0 + \dfrac{r^2}{2}\,\text{Arcsen}\,0\right]$

$\text{Arcsen}\,1 = \dfrac{\pi}{2}$

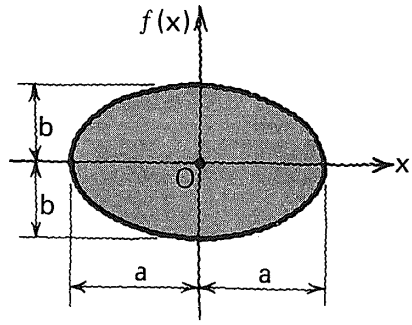
$\text{Arcsen}\,0 = 0$

- $4\left[\dfrac{r^2}{2} \cdot \dfrac{\pi}{2}\right] = 4 \cdot \dfrac{\pi r^2}{4}$

πr^2 conocida expresión para el área de un círculo.

60

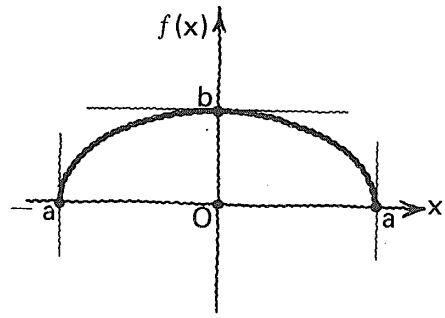
De manera similar, calculemos el área de una región elíptica de semieje mayor **a** y semieje menor **b.**



61

Función relacionada:

$f(x) =$ _____

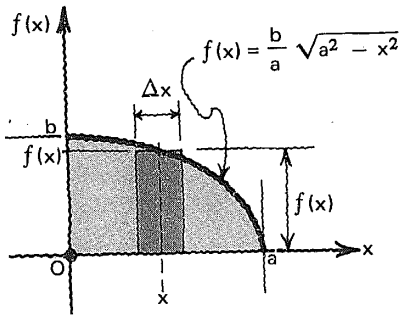


$\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$

62

$S =$ [ ]

Expresión integral



$$4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

o bien

$$\frac{4b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

63

Evaluemos:

$$S = \frac{4b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = $$ [ ]

[ ]

[ ]

$$\frac{4b}{a}\left[\frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\,\text{Arcsen}\,\frac{x}{a}\right]_0^a$$

$$\frac{4b}{a}\left\{\left[0 + \frac{a^2}{2}\,\text{Arcsen}\,1\right] - \left[0 + \frac{a^2}{2}\,\text{Arcsen}\,0\right]\right\}$$

$\text{Arcsen}\,1 = \pi/2$

$\text{Arcsen}\,0 = 0$

$$\frac{4b}{a}\left(\frac{a^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \pi ab$$

πab

64

Calcular el área
de la región plana
limitada por las parábolas

$$y = x^2 + 3x + 4$$

y

$$y = 6 - x^2$$

65

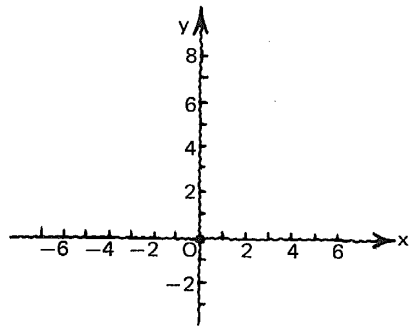
Tracemos, antes que nada, la gráfica de las parábolas

$$y = x^2 + 3x + 4$$

y

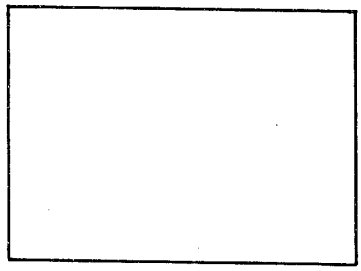
$$y = 6 - x^2$$

señalando el área que se requiere determinar.

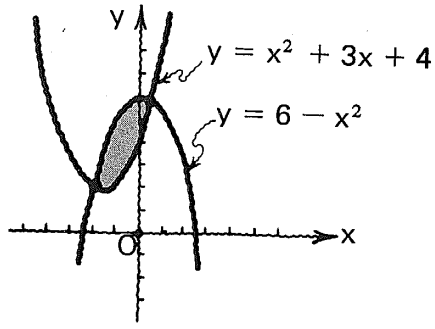


Respuesta en el cuadro siguiente.

Enseguida, necesitamos determinar los puntos de intersección de las parábolas cuyas abscisas serán los límites de integración



a = ⌊_____⌋ b = ⌊_____⌋



$y = x^2 + 3x + 4$

$y = 6 - x^2$

eliminando a y:

$x^2 + 3x + 4 = 6 - x^2$

$2x^2 + 3x - 2 = 0$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{4}$$

$$x = \frac{-3 \pm 5}{4}$$

$x_1 = -2$

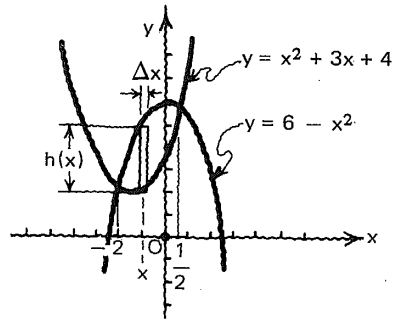
$$x_2 = \frac{1}{2}$$

• -2 • $\frac{1}{2}$

66

Tracemos el rectángulo genérico y determinemos su altura

h (x) = ⌊_____⌋



Atención.

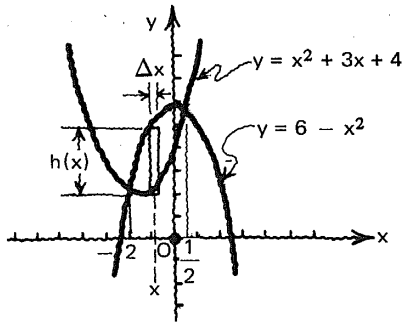
$(6 - x^2) - (x^2 + 3x + 4)$

$6 - x^2 - x^2 - 3x - 4$

$2 - 3x - 2x^2$

67

Escribamos ahora
la integral que
representa el área buscada



$$\int_{-2}^{\frac{1}{2}} (2 - 3x - 2x^2)\,dx$$

68

Evaluemos:

$$\int_{-2}^{\frac{1}{2}} (2 - 3x - 2x^2)\,dx = \square$$

$$S = \square$$

$$\left[2x - \frac{3x^2}{2} - \frac{2x^3}{3}\right]_{-2}^{\frac{1}{2}}$$

$$\left[2\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{3\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} - \frac{2\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3}\right]$$

$$-\left[2(-2) - \frac{3(-2)^2}{2} - \frac{2(-2)^3}{3}\right]$$

$$\left(1 - \frac{3}{8} - \frac{1}{12}\right) - \left(-4 - 6 + \frac{16}{3}\right)$$

$$\frac{13}{24} - \left(-\frac{14}{3}\right)$$

$$\frac{13}{24} + \frac{14}{3}$$

$$\frac{125}{24} \doteq 5.21$$

69

Se requiere determinar
el área de la región
limitada por
la curva

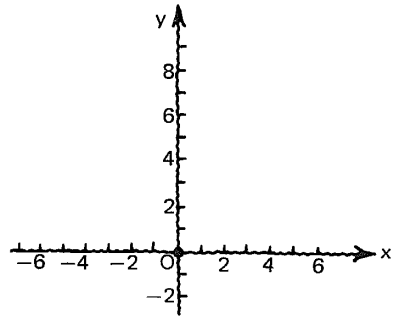
$y = 2^x$

y las rectas

$x = -4$ y $y = 8$

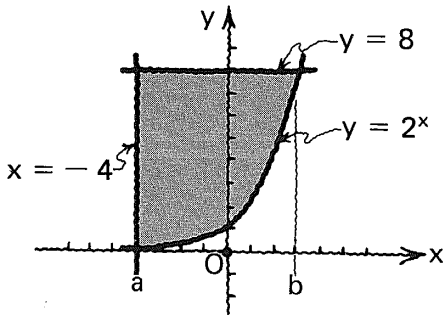
70

Gráfica
de la curva
$y = 2^x$
y las rectas
$x = -4$ y $y = 8$
señalando el área
que se requiere calcular



Respuesta
en el
cuadro siguiente.

Determinación de los
límites de integración



límite inferior a = ____

límite superior b = ____

- **a = −4**

Para determinar b es necesario encontrar la abscisa del punto de intersección de la curva $y = 2^x$ y la recta $y = 8$.
Escribamos:

$y = 8$
$y = 2^x$

y eliminemos y:

$2^x = 8$

Tomando logaritmos naturales:

$x \ln 2 = \ln 8$

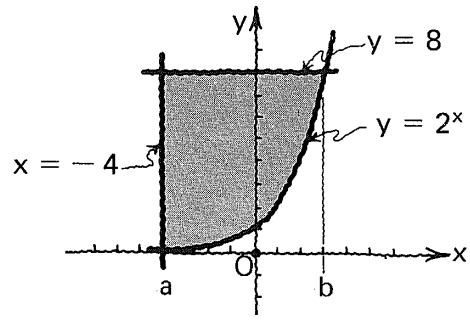
$$x = \frac{\ln 8}{\ln 2} \doteq \frac{2.0794415}{0.69314718} = 3$$

- **b = 3**

71

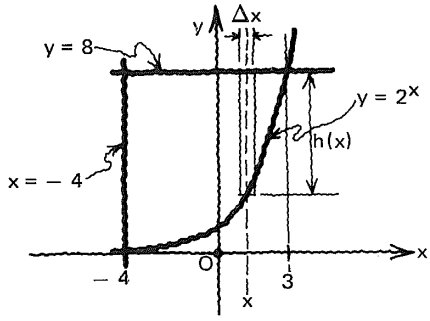
Tracemos
el rectángulo genérico
y
determinemos
su altura

$h(x) =$ ____



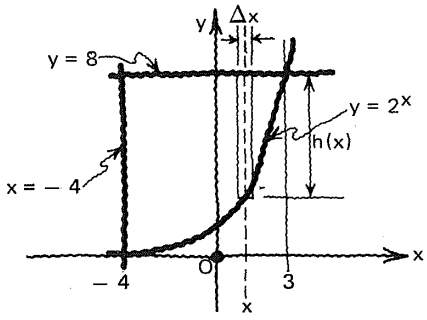
Respuesta
en el
cuadro siguiente.

$h(x) = 8 - 2^x$



72

Integral representativa del área requerida



$$\int_{-4}^{3} h(x)\,dx = \int_{-4}^{3} (8 - 2^x)\,dx$$

73

$$S = \int_{-4}^{3} (8 - 2^x)\,dx =$$

$$S =$$

$$\left[8x - \frac{2^x}{\ln 2}\right]_{-4}^{3}$$

$$\left[8(3) - \frac{2^3}{\ln 2}\right] - \left[8x(-4) - \frac{2^{-4}}{\ln 2}\right]$$

$$\doteq \left[24 - \frac{8}{0.6931}\right] - \left[-32 - \frac{1}{16 \times 0.6931}\right]$$

$(24 - 11.54) - (-32 - 0.09)$

$12.46 - (-32.09)$

$12.46 + 32.09$

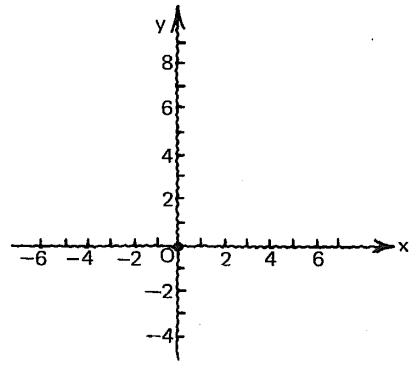
44.55

74

Ahora,
consideremos la curva
representada por

$y = x^3 - 5x^2 + 2x + 8$

y tracemos su gráfica

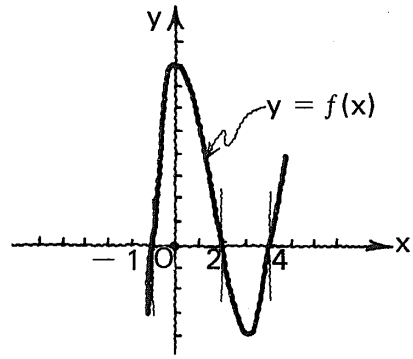


Respuesta
en el
cuadro siguiente.

Supongamos
que nos piden calcular
el área de la región
limitada por la curva
considerada, por
las rectas $x = -1$

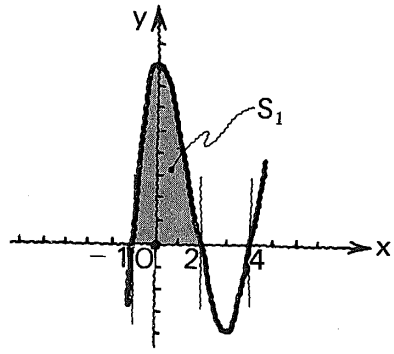
y $x = 4$,

y por el eje de las x.



75

Calculemos
el área S_1
y que está dada
por la integral



$\int_{-1}^{2} f(x)\,dx$

$\int_{-1}^{2} (x^3 - 5x^2 + 2x + 8)\,dx$

76

$S_1 = \int_{-1}^{2} (x^3 - 5x^2 + 2x + 8)\,dx =$ ⌊ ⌋

⌊ ⌋

$S_1 =$ ⌊ ⌋

$\left[\frac{x^4}{4} - \frac{5x^3}{3} + x^2 + 8x\right]_{-1}^{2}$

$\left[\frac{(2)^4}{4} - \frac{5(2)^3}{3} + (2)^2 + 8(2)\right]$

$-\left[\frac{(-1)^4}{4} - \frac{5(-1)^3}{3} + (-1)^2 + 8(-1)\right]$

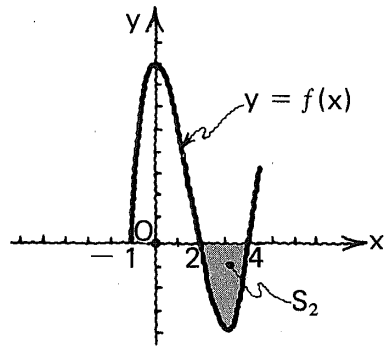
$\frac{32}{3} - \left(-\frac{61}{12}\right) = \frac{32}{3} + \frac{61}{12}$

$\frac{63}{4} = 15.75$

77

Ahora calculemos el área S_2 dada por la integral

⌊ ⌋



$\int_2^4 f(x)\,dx$

$= \int_2^4 (x^3 - 5x^2 + 2x + 8)\,dx$

78

$\int_2^4 f(x)\,dx = \int_2^4 (x^3 - 5x^2 + 2x + 8)\,dx$

$=$ ⌊ ⌋

⌊ ⌋

$S_2 =$ ⌊ ⌋

$\left[\frac{x4}{4} - \frac{5x^3}{3} + x^2 + 8x\right]_2^4$

$\left[\frac{(4)^4}{4} - \frac{5(4)^3}{3} + (4)^2 + 8(4)\right] - \frac{32}{3}$

$\frac{16}{3} - \frac{32}{3} = -\frac{16}{3}$

$-\frac{16}{3} \doteq -5.33$

79

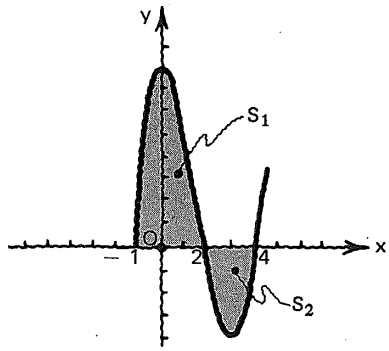
Mucha atención.

Hemos obtenido:

$$S_1 = \frac{63}{4} = 15.75$$

y

$$S_2 = -\frac{16}{3} \doteq -5.33$$



Ahora bien,
si lo que se nos pide
es la **suma de los valores absolutos** de estas áreas,
tenemos:

$$S = |S_1| + |S_2| = \text{[\_\_\_\_\_]}$$

$$\left|\frac{63}{4}\right| + \left|-\frac{16}{3}\right| = \frac{63}{4} + \frac{16}{3} = \frac{253}{12}$$

$$\downarrow$$

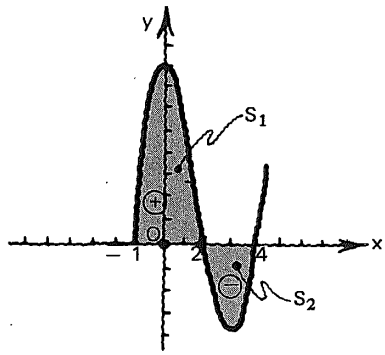
21.08

$$15.75 + 5.33 = \text{[\_\_\_\_\_]} \uparrow$$

80

Si lo que nos interesa
es, por el contrario,
lo que podríamos
llamar
área dirigida,
entonces

$$S = \text{[\_\_\_\_\_]}$$



$$S_1 + S_2 = \frac{63}{4} + \left(-\frac{16}{3}\right)$$

$$= \frac{63}{4} - \frac{16}{3} = \frac{125}{12}$$

$$\downarrow$$

10.42

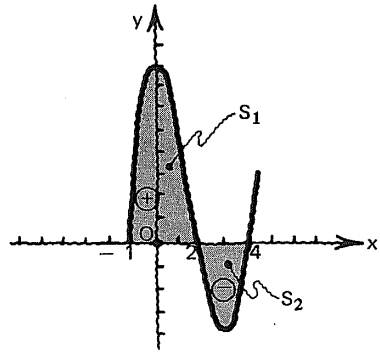
$$15.75 - 5.33 \uparrow$$

81

Este segundo resultado
es el que obtenemos
cuando evaluamos
la integral

$$\int_{-1}^{4} f(x)\,dx$$

como podemos verificar
fácilmente



$$\int_{-1}^{4} f(x)\,dx$$

$$= \int_{-1}^{4} (x^3 - 5x^2 + 2x + 8)\,dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{5x^3}{3} + x^2 + 8x\right]_{-1}^{4}$$

$$= \frac{16}{3} - \left(-\frac{61}{12}\right)$$

$$= \frac{16}{3} + \frac{61}{12}$$

$$= \mathbf{\frac{125}{12}}$$

$$= \mathbf{10.42}$$

8.6.2.1

Práctica adicional
de
cálculo de áreas
de regiones planas,
si se considera necesario.

8.6.2

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *calcular* áreas de regiones planas por integración definida.

6.3

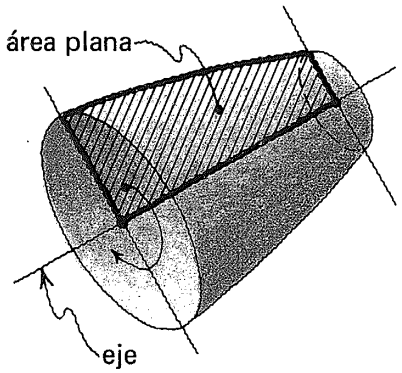
Volumen
de
sólidos de revolución

82

Llamamos

sólido de revolución

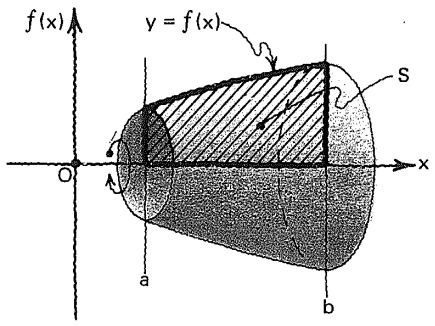
al que se genera
haciendo girar
una superficie plana
alrededor de un eje,
como se sugiere en la
figura.



83

Sea
la región del plano
limitada por la curva f,
las rectas $x = a$, $x = b$
y el eje de las x.

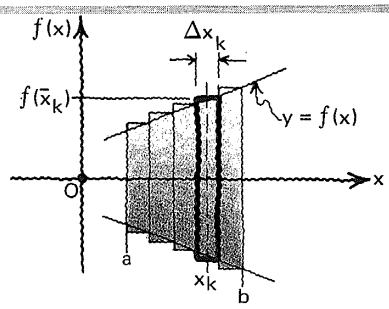
Si hacemos girar esta
superficie alrededor del
eje de las x,
obtenemos el sólido de
revolución indicado.



84

Atención.

Si consideramos el sólido formado por **n** elementos en forma de disco, podemos escribir para el volumen del sólido:



como límite de una suma de Riemann

$V = \lim_{\|\Delta x\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} \pi [f(\bar{x}_k)]^2 \, \Delta x_k$

como integral definida

$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx$

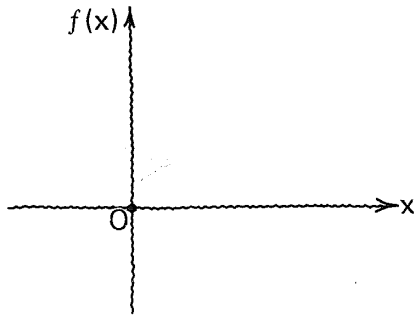
42

85

Apliquemos
la idea de los cuadros anteriores
a la obtención
de una fórmula
para el **volumen**
de un cono circular recto
de radio r y altura h.

86

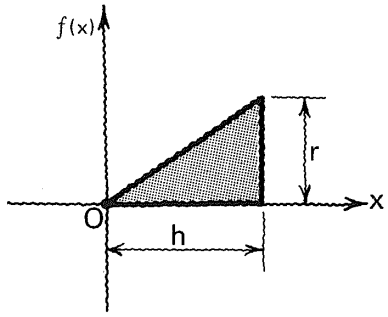
Hagamos un esquema indicando la región del plano que haremos girar alrededor del eje x
para obtener el sólido requerido.



Respuesta
en el
cuadro siguiente.

La función f relacionada puede ser escrita así:

$f(x) =$ [ ]

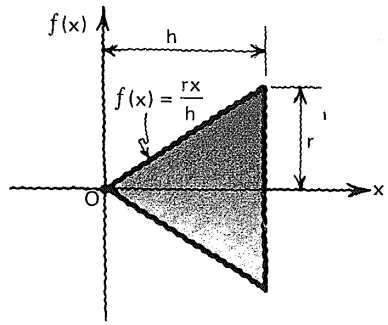


$\frac{r}{h}x$

87

Volumen del cono circular recto escrito en forma de integral definida:

$V =$ [ ]



$$\int_0^h \pi\left(\frac{rx}{h}\right)^2 dx = \frac{\pi r^2}{h^2}\int_0^h x^2\,dx$$

88

Evaluemos:

$$V = \frac{\pi r^2}{h^2}\int_0^h x^2\,dx = \text{[ ]}$$

$$\frac{\pi r^2}{h^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h$$

$$\frac{\pi r^2}{h^2}\left[\frac{h^3}{3}\right]$$

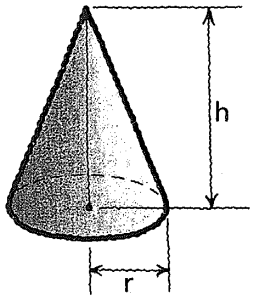
$V =$ [ ]

$$\frac{\pi r^2 h}{3}$$

89

Hemos obtenido
la ya conocida fórmula
para el volumen
de un
cono circular recto.

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$$



90

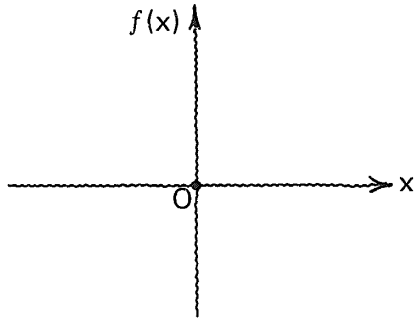
Obtengamos ahora,
una fórmula
para el
volumen de una

esfera

de radio r.

91

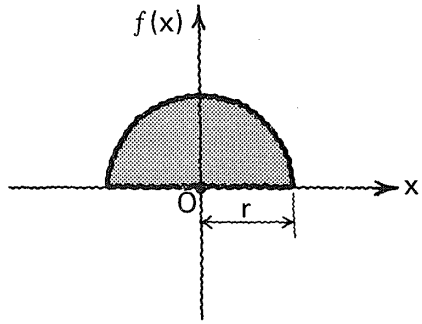
Croquis auxiliar. →



Respuesta
en el
cuadro siguiente.

Función:

$f(x) =$ [ ]



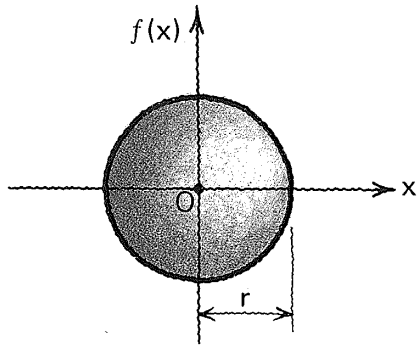
$\sqrt{r^2 - x^2}$

92

$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$

Volumen de la esfera, expresado en forma de integral definida:

$V =$ [ ]



$\int_{-r}^{r} \pi \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx$

o bien

$\pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\, dx$

o bien

$2\pi \int_{0}^{r} (r^2 - x^2)\, dx$

93

Evaluando:

$V = 2\pi \int_0^r (r^2 - x^2)\, dx =$ [ ]

[ ]

[ ]

$2\pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^r$

$2\pi \left[r^3 - \frac{r^3}{3} \right]$

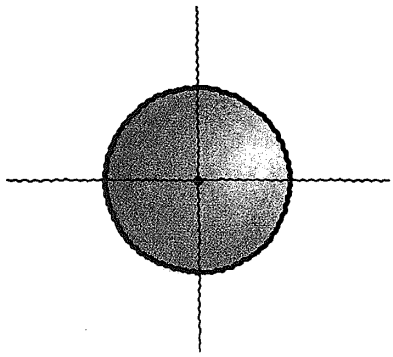
$2\pi \cdot \frac{2r^3}{3}$

$\frac{4\pi r^3}{3}$

94

Volumen
de una esfera
de radio r.

$$V = \frac{4\pi r^3}{3}$$



95

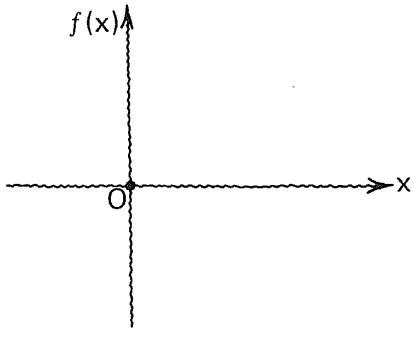
Calculemos
ahora
el volumen
de un

cilindro circular recto

de radio r
y altura h.

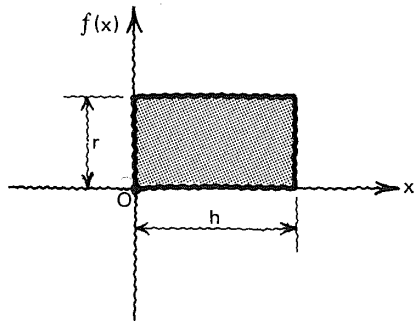
96

Croquis
auxiliar



Respuesta
en el
cuadro siguiente.

Función:
$f(x) =$ [ ]

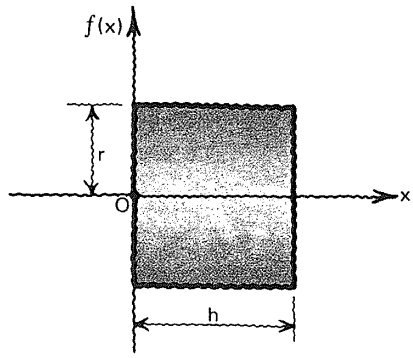


r.

97

Volumen del cilindro en forma de integral definida:

$V =$ [ ]



$\pi r^2 \int_0^h dx$

98

$V = \pi r^2 \int_0^h dx =$ [ ]

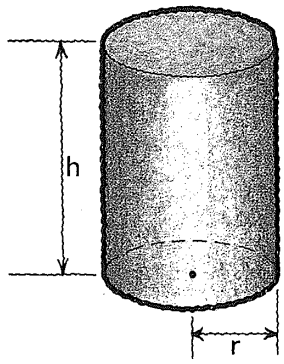
$\pi r^2 [x]_0^h$

$\pi r^2 h$

99

Volumen de un
cilindro circular recto

$V = \pi r^2 h$

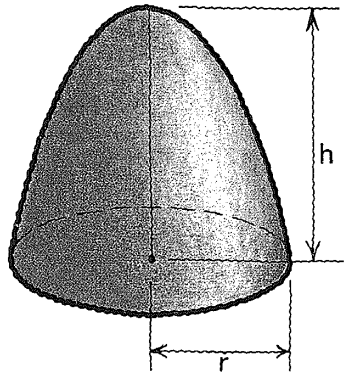


100

Necesitamos
una fórmula
para un

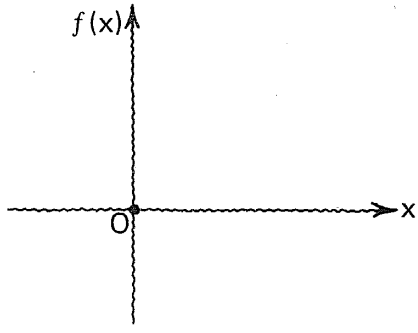
paraboloide de revolución

de radio r
y altura h.



101

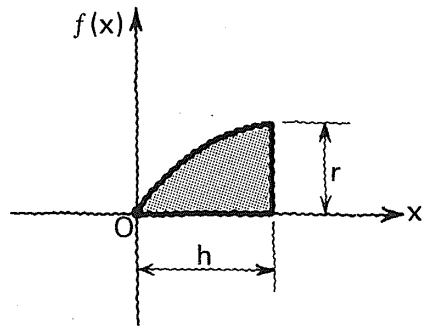
Croquis
auxiliar



Respuesta
en el
cuadro siguiente.

Función:

$f(x) =$ [ ]



Ecuación de una parábola horizontal.

$y^2 = 4px$

si $x = h \quad y = r$

de donde

$$p = \frac{y^2}{4x} = \frac{r^2}{4h}$$

por lo tanto:

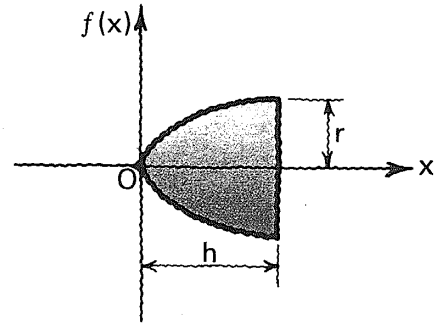
$$y^2 = 4 \cdot \frac{r^2}{4h} \cdot x = \frac{r^2}{h} x$$

$$y = \sqrt{\frac{r^2 x}{h}} = r\sqrt{\frac{x}{h}}$$

102

Volumen del paraboloide en forma de integral definida

$V =$ [ ]



$$\pi \int_0^h \frac{r^2}{h} x\,dx = \frac{\pi r^2}{h} \int_0^h x\,dx$$

103

$$V = \frac{\pi r^2}{h} \int_0^h x\,dx = \text{[ ]}$$

$$\frac{\pi r^2}{h} \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^h$$

$$\frac{\pi r^2}{h} \left[\frac{h^2}{2}\right]$$

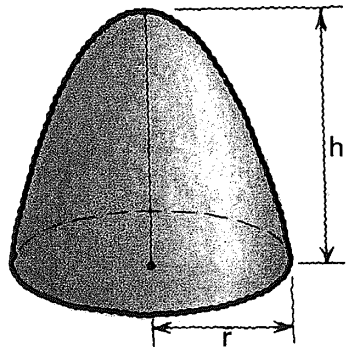
$$\frac{\pi r^2 h}{2}$$

104

Volumen
de un

paraboloide de revolución:

$$V = \frac{\pi r^2 h}{2}$$



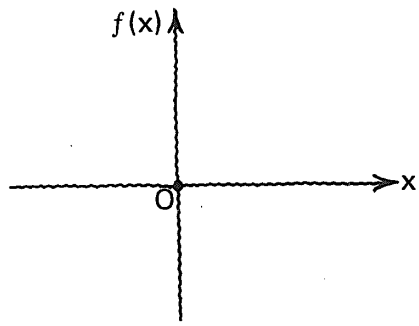
105

Hallar una fórmula
para el volumen
de un casquete esférico
de altura h.

Radio de la esfera = r.

106

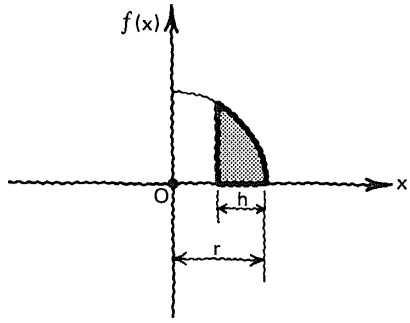
Croquis
auxiliar →



Respuesta
en el
cuadro siguiente.

Función:

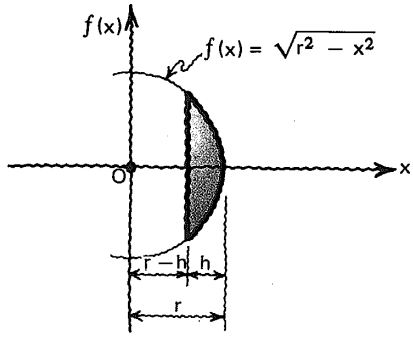
$f(x) =$ [ ]



$\sqrt{r^2 - x^2}$

107

$V =$ [ ]



$\pi \int_{r-h}^{r} \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx$

$\pi \int_{r-h}^{r} (r^2 - x^2)\, dx$

108

$V = \pi \int_{r-h}^{r} (r^2 - x^2)\, dx =$ [ ]

$V =$ [ ]

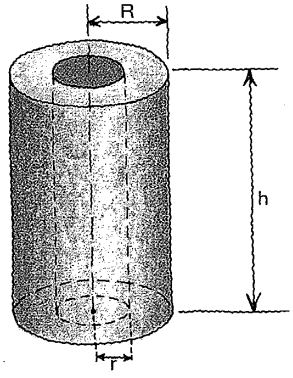
$\pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{r-h}^{r}$

$\pi \left\{ \left[r^3 - \frac{r^3}{3} \right] - \left[r^2 (r - h) - \frac{(r - h)^3}{3} \right] \right\}$

$\frac{\pi h^2}{3} (3r - h)$

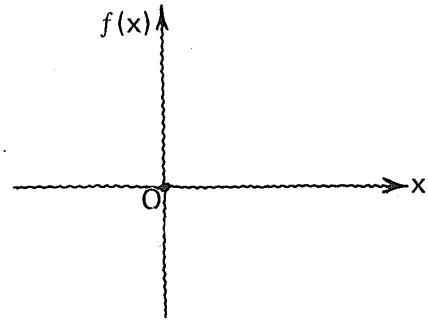
109

Se requiere
encontrar una expresión
para el volumen
de un cilindro circular hueco
como el mostrado.



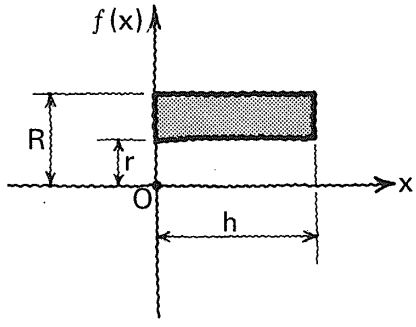
110

Croquis
auxiliar →



Respuesta
en el
cuadro siguiente.

$V =$ ⌊_____⌋



$$\pi \int_0^h (R^2 - r^2)\, dx$$

111

$$V = \pi\int_0^h (R^2 - r^2)\,dx = \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

$$\pi[(R^2 - r^2)x]_0^h$$

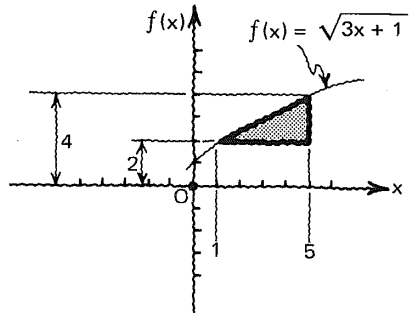
$$\pi(R^2 - r^2)h$$

$$V = \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

$$\pi h(R^2 - r^2)$$

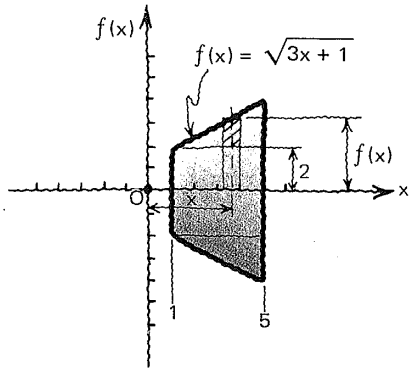
112

Determinar
el volumen del sólido
generado
al girar la superficie
mostrada con
respecto al eje x.



113

$$V = \underline{\qquad\qquad\qquad}$$



$$\int_1^5 \pi\{[f(x)]^2 - 2^2\}\,dx$$

$$\pi\int_1^5 \{[f(x)]^2 - 4\}\,dx$$

$$\pi\int_1^5 (3x + 1 - 4)\,dx$$

$$\pi\int_1^5 (3x - 3)\,dx$$

$$3\pi\int_1^5 (x - 1)\,dx$$

114

$V = 3\pi \int_1^5 (x - 1)\,dx =$ ⌊ ⌋

V = ⌊ ⌋

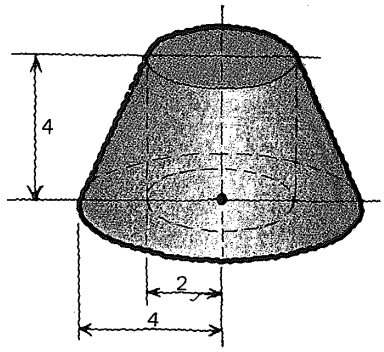
$3\pi \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_1^5$

$3\pi \left[\frac{(5)^2}{2} - 5 \right] - \left[\frac{1^2}{2} - 1 \right]$

24π

115

$V = 24\pi$ ⟶



8.6.3.1

Práctica adicional
de
cálculo de volúmenes de sólidos de revolución,
si se considera necesario.

8.6.3

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *calcular* volúmenes de sólidos de revolución mediante integrales definidas.

6.4

Volumen de sólidos de sección transversal dada

116

En el submódulo anterior hemos aprendido a calcular volúmenes de sólidos de revolución haciendo uso de la expresión:

$$V = \int_a^b \pi [f(x)]^2 \, dx$$

117

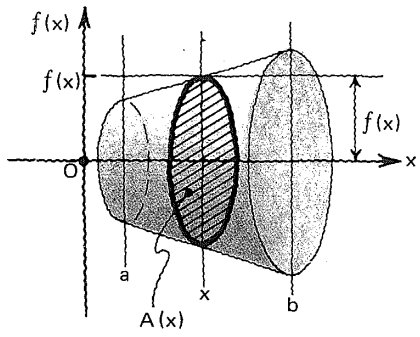
$$V = \int_a^b \pi [f(x)]^2 \, dx$$

Podemos observar que el integrando

$$\pi [f(x)]^2$$

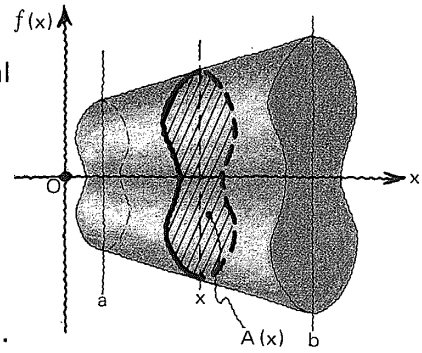
representa el área de la sección transversal del sólido a una distancia x del origen, de manera que podemos escribir:

$$V = \int_a^b A(x) \, dx$$



118

Ahora bien,
siempre que podamos
expresar
el área de la sección transversal
de un sólido
como una función de
la variable independiente x,
siendo x la distancia
del origen a la sección
considerada, podemos usar
la expresión de abajo para
calcular el volumen del sólido.



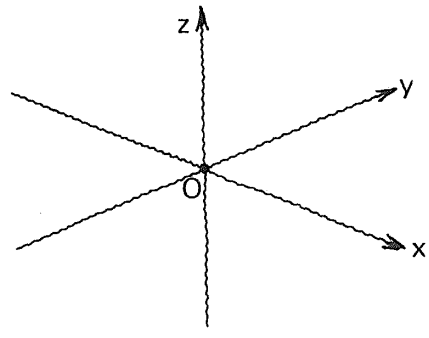
$$V = \int_a^b A(x)\,dx$$

119

Se requiere determinar
el volumen
de un sólido
cuya base es un círculo
de radio r
y toda sección perpendicular
a uno de sus diámetros
es un cuadrado

120

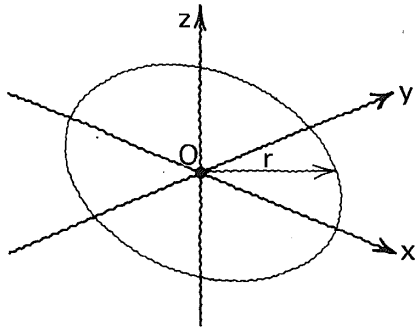
Consideremos
un sistema de
tres ejes perpendi-
culares entre sí
como se muestra.



121

Sabemos que
la base del sólido
es un círculo
de radio r.

La ecuación de
este círculo es:

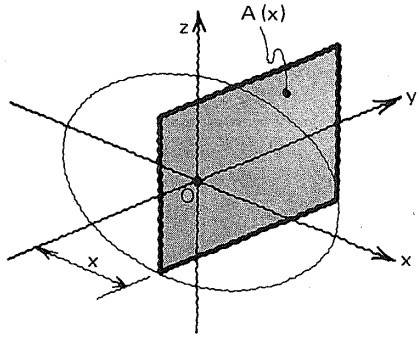


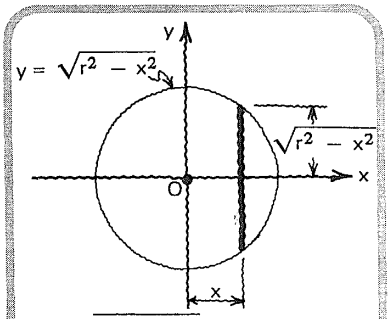
$x^2 + y^2 = 16$

122

Sabemos también
que
a una distancia x
del origen
la sección transversal
al diámetro
que descansa sobre
el eje x
es un cuadrado
de lado =
por lo que
su área A(x)
puede ser
escrita así:

$A(x) =$





$2\sqrt{r^2 - x^2}$

$\left(2\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2$
$= 4(r^2 - x^2)$

123

$A(x) = 4(r^2 - x^2)$

El volumen del sólido puede quedar
expresado así:

$V =$

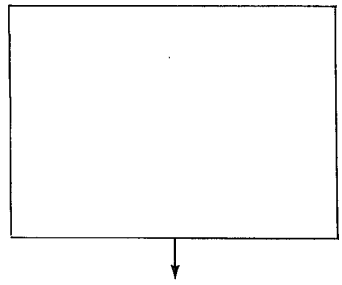
$V = 4\int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\,dx$

$= 8\int_{0}^{r} (r^2 - x^2)\,dx$

124

Evaluando:

$$V = 8\int_0^r (r^2 - x^2)\,dx = \boxed{}$$



$$V = \boxed{}$$

$$8\left[r^2x - \frac{x^3}{3}\right]^r$$

$$8\left[r^3 - \frac{r^3}{3}\right]$$

$$8\left[\frac{2r^3}{3}\right]$$

$$\frac{16r^3}{3}$$

8.6.4.1

Práctica adicional
de
cálculo de volúmenes
de
sólidos de sección
transversal dada,
si se considera necesario

8.6.4

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *calcular* volúmenes de sólidos de sección transversal dada por medio de la expresión

$$V = \int_a^b A(x)\,dx$$

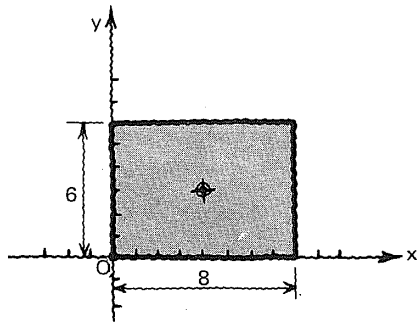
6.5

Momento y centro geométrico

125

No nos cuesta ningún trabajo determinar el centro geométrico o centroide de una región rectangular. Por ejemplo:

el centro geométrico de la región rectangular mostrada es el punto [ ]



(4, 3)

126

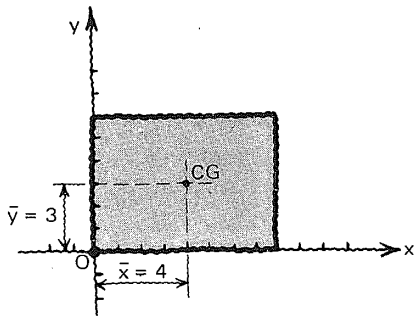
Llamaremos

$\overline{x}$ e $\overline{y}$

a las coordenadas del centro geométrico o centroide de una figura plana.

Así:

$$CG = (\overline{x}, \overline{y})$$

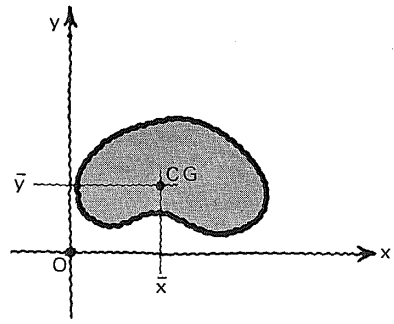


127

Para la determinación
del **centroide**
de una figura plana
utilizaremos el conocimiento
que tenemos
de centroide de un
rectángulo
y
el concepto de

momento de área,

que a continuación
estableceremos.



128

Llamaremos,

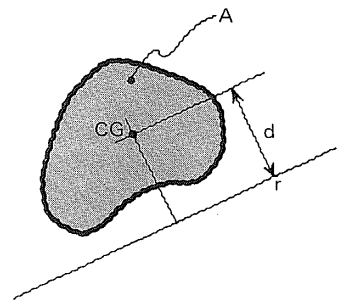
momento de una figura plana

con respecto a una recta r
al producto del área de la figura
y
la distancia de su centro geométrico
a la recta.

129

Simbólicamente:

$$M_r = Ad$$

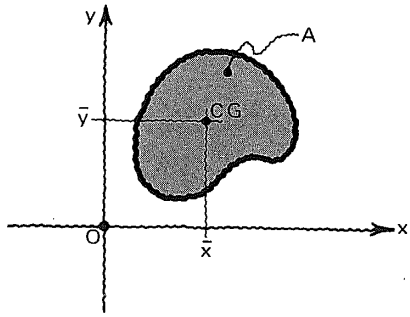


130

Así:

$M_x =$ ⌊_____⌋

$M_y =$ ⌊_____⌋



$A\bar{y}$

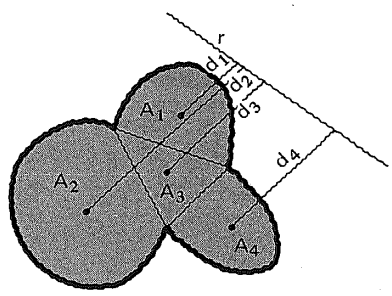
$A\bar{x}$

131

El **momento de una figura compuesta** de varias figuras planas, con respecto a una recta r, será igual a la suma de los productos del área de cada figura y la distancia de su centroide a la recta.

Simbólicamente para la figura adjunta:

M_r ⌊_____⌋



$A_1d_1 + A_2d_2 + A_3d_3 + A_4d_4$

132

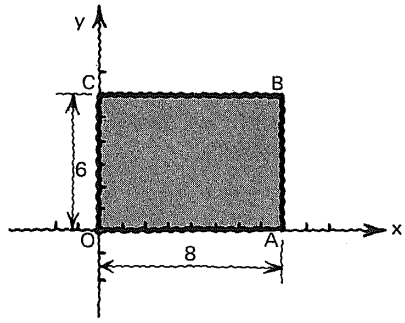
Si conocemos el área y el centro geométrico de una figura plana, es fácil determinar su momento con respecto a una recta dada.

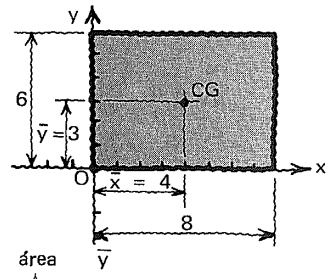
133

Momentos del rectángulo OABC con respecto a los ejes coordenados:

$M_x =$ _____

$M_y =$ _____





área $\overbrace{6 \times 8}$ $\times \overbrace{3} = 144$ (unidades cúbicas)

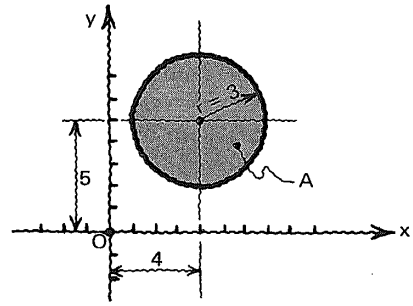
área $\overbrace{6 \times 8}$ $\times \overbrace{\bar{x}} = 192$ (unidades cúbicas)

134

$A =$ _____

$M_x =$ _____

$M_y =$ _____



$\pi 3^2 = 9\pi$

$9\pi \cdot 5 = 45\pi$

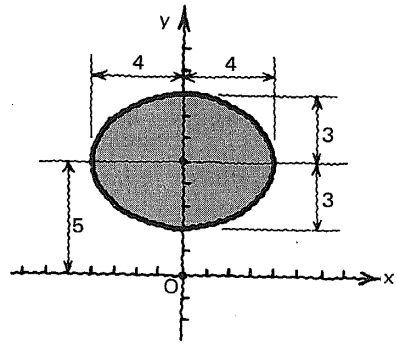
$9\pi \cdot 4 = 36\pi$

135

$A =$ _____

$M_x =$ _____

$M_y =$ _____



$\pi ab = \pi \cdot 4 \cdot 3 = 12\pi$

$12\pi \cdot 5 = 60\pi$

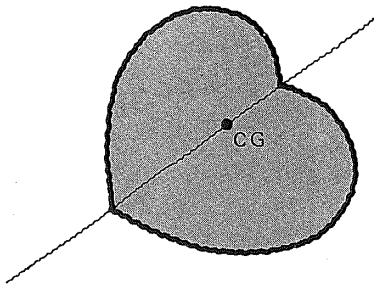
$12\pi \cdot 0 = 0$

136

Podemos observar que:

el momento de una figura plana con respecto a una recta que pasa por su centroide es igual a: [ ]

puesto que la distancia del centroide a la recta es igual a [ ]

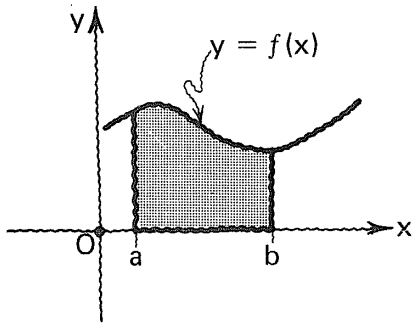


cero

cero

137

Ahora bien, supóngase que se desea conocer el momento de la región plana limitada por la curva f, las rectas $x = a$, $x = b$ y el eje de las x, con respecto a cada uno de los ejes coordenados.

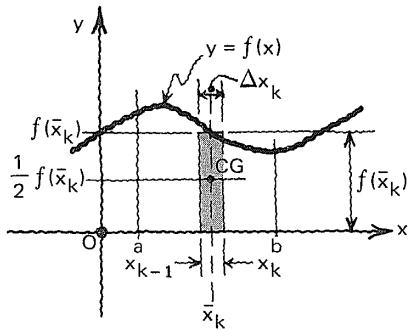


138

Recurrimos nuevamente a nuestro conocido procedimiento de "divide y vencerás".

De acuerdo con la figura podemos escribir en forma de una suma de Riemann:

$M_x =$ [ ]



$$\lim_{\|\Delta x\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k)\,\Delta x_k \cdot \frac{1}{2} f(\bar{x}_k)$$

o bien:

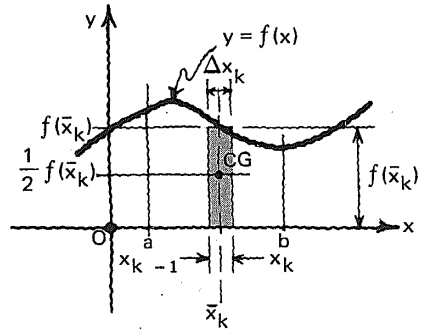
$$\lim_{\|\Delta x\| \to 0} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} [f(\bar{x}_k)]^2 \cdot \Delta x_k$$

139

$$M_x = \lim_{\|\Delta x\| \to 0} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} [f(\bar{x}_k)]^2 \, \Delta x_k$$

$$= \boxed{\qquad}$$

en forma de integral



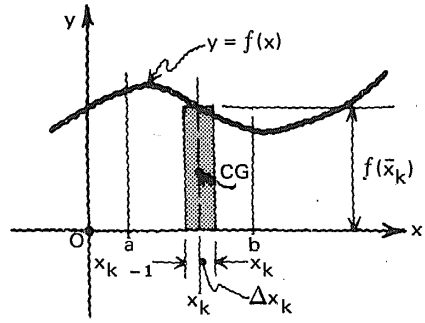
$$\frac{1}{2}\int_a^b [f(x)]^2 \, dx$$

140

Similarmente:

$$M_y = \boxed{\qquad}$$

como límite de una suma de Riemann



$$\lim_{\|\Delta x\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k) \cdot \Delta x_k \cdot \bar{x}_k$$

o bien:

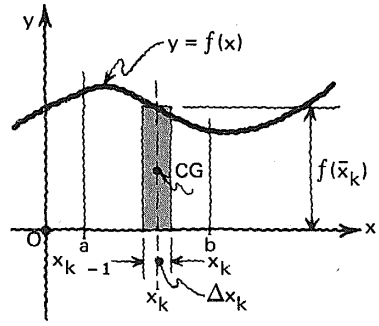
$$\lim_{\|\Delta x\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} \bar{x}_k \, f(\bar{x}_k) \, \Delta x_k$$

141

$$M_y = \lim_{\|\Delta x\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} \bar{x}_k \, f(\bar{x}_k) \, \Delta x_k$$

$$= \boxed{\qquad}$$

como integral

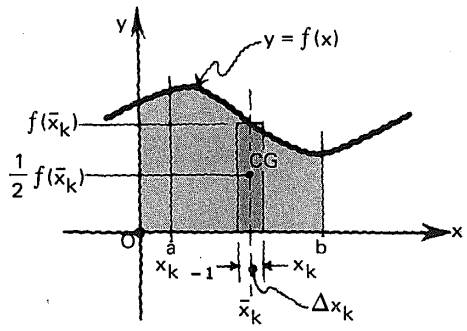


$$\int_a^b x \, f(x) \, dx$$

142

$$M_x = \frac{1}{2}\int_a^b [f(x)]^2\ dx$$

$$M_y = \int_a^b x f(x)\ dx$$

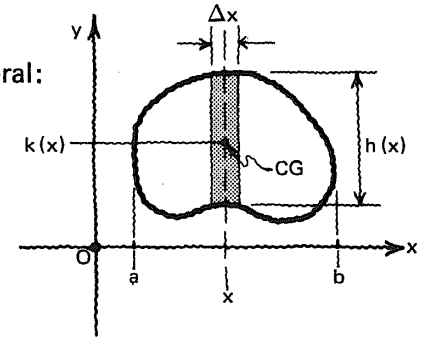


143

De manera todavía más general:

$$M_x = \int_a^b h(x)\,k(x)\ dx$$

$$M_y = \int_a^b x\,h(x)\ dx$$



144

Ahora bien,
puesto que

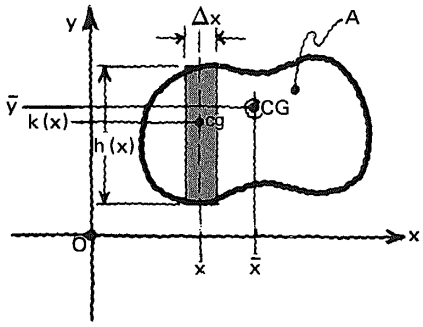
$$M_x = A\bar{y}$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{A}$$

y similarmente,

$M_y =$ [ ] y

$\bar{x} =$ [ ]



$A\bar{x}$

$\dfrac{M\bar{y}}{A}$

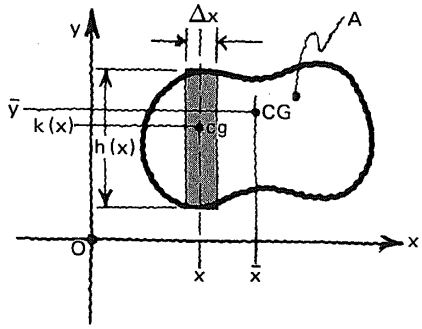
145

Centroide CG = $(\bar{x}, \bar{y})$
una figura plana:

$$\bar{y} = \frac{\int_a^b h(x)\,k(x)\,dx}{\int_a^b h(x)\,dx}$$

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b xh(x)\,dx}{\int_a^b h(x)\,dx}$$

si $h(x) \geqslant 0$
para toda $x \in [a, b]$;



146

Ejemplo

Se requiere determinar
el centro geométrico
de la región del plano
limitada por la parábola

$$f(x) = 4x - x^2$$

y la recta

$$g(x) = x$$

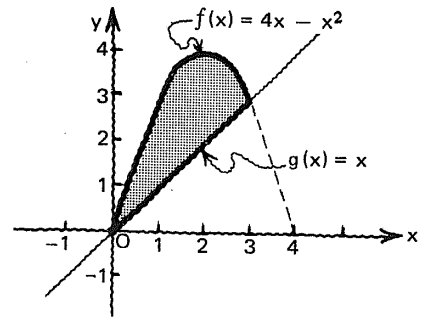
147

Como

$$\bar{y} = \frac{M_x}{A} = \frac{\int_a^b h(x)\,k(x)\,dx}{\int_a^b h(x)\,dx}$$

calculemos primero

$$A = \int_a^b h(x)\,dx$$

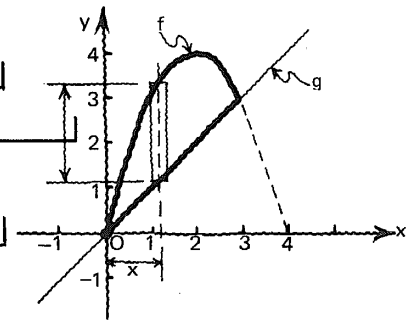


148

$h(x) =$ ⌊ ⌋

por lo tanto:

$A = \int_a^b h(x)\,dx =$ ⌊ ⌋



$f(x) - g(x) = (4x - x^2) - (x)$

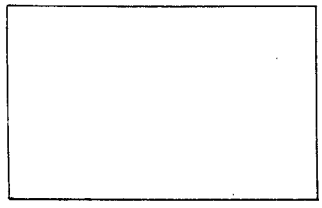
$= 3x - x^2$

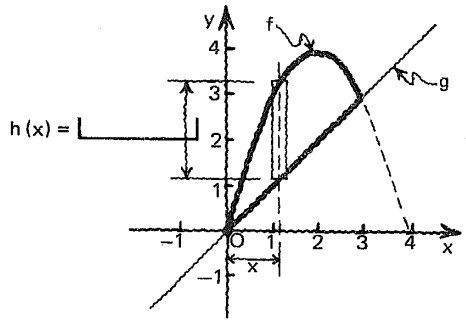
$\int_a^b (3x - x^2)\,dx$

149

$A = \int_a^b h(x)\,dx = \int_a^b (3x - x^2)\,dx$

luego determinamos
los límites de integración





$a =$ ⌊ ⌋

$b =$ ⌊ ⌋

Hay que resolver el sistema:

$y = 4x - x^2$
$y = x$

eliminando a y obtenemos:

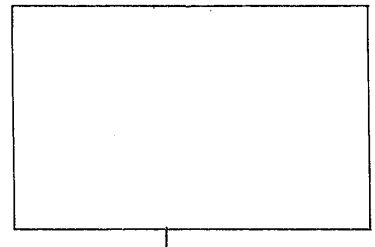
$4x - x^2 = x$
$3x - x^2 = 0$
$x(3 - x) = 0$
$x_1 = 0$
$x_2 = 3$

0

3

150

$A = \int_a^b h(x)\,dx = \int_0^3 (3x - x^2)\,dx =$ ⌊ ⌋



$A =$ ⌊ ⌋

$\left[\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^3$

$\left[\frac{3(3)^2}{2} - \frac{(3)^3}{3}\right]$

$\frac{27}{2} - \frac{27}{3}$

$\frac{9}{2}$

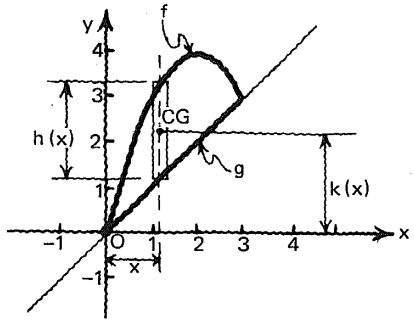
151

Calcularemos, ahora, el numerador de

$$\overline{y} = \frac{M_x}{A} = \frac{\int_a^b h(x)\,k(x)\,dx}{\int_a^b h(x)\,dx}$$

$h(x) =$ ____

$k(x) =$ ____



Atención

$f(x) - g(x) = 3x - x^2$

$$\frac{f(x)+g(x)}{2} = \frac{(4x - x^2)+x}{2}$$

$$= \frac{5x - x^2}{2}$$

152

$M_x =$ ____

↑

expresado como integral definida

$$\int_0^3 (3x - x^2)\left(\frac{5x - x^2}{2}\right) dx$$

o bien

$$\frac{1}{2}\int_0^3 (3x - x^2)\,(5x - x^2)\,dx$$

o bien

$$\frac{1}{2}\int_0^3 (15x^2 - 8x^3 + x^4)\,dx$$

153

$$M_x = \int_a^b h(x)\,k(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^3 (15x^2 - 8x^3 + x^4)\,dx$$

↓

____

↓

____

↓

$M_x =$ ____

$$\frac{1}{2}\left[5x^3 - 2x^4 + \frac{x^5}{5}\right]_0^3$$

$$\frac{1}{2}\left[5(3)^3 - 2(3)^4 + \frac{(3)^2}{5}\right]$$

$$\frac{1}{2}\left[135 - 162 + \frac{243}{5}\right]$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{108}{5}\right]$$

$$\frac{54}{5}$$

154

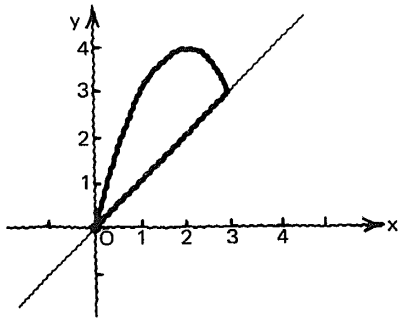
Puesto que:

$$M_x = \frac{54}{5}$$

y

$$A = \frac{9}{2}$$

$$\bar{y} = \boxed{\quad} = \boxed{\quad}$$

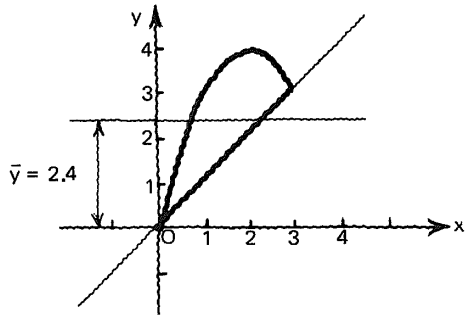


$$\frac{M_x}{A} = \frac{\frac{54}{5}}{\frac{9}{2}} = \frac{108}{45} = \frac{12}{5} = 2.4$$

155

Enseguida calcularemos

$$M_y = \boxed{\quad}$$

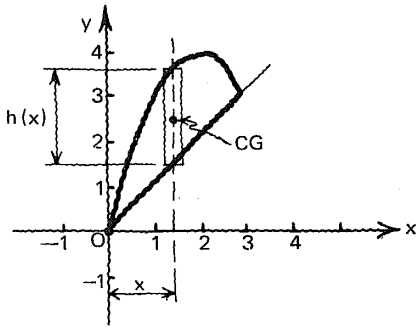


$$\int_a^b x\,h(x)\,dx$$

156

$$M_y = \int_a^b x\,h(x)\,dx$$

$$\boxed{\quad}$$



Puesto que

$h(x) = 3x - x^2$

$$\int_0^3 x(3x - x^2)\,dx$$

o bien

$$\int_0^3 (3x^2 - x^3)\,dx$$

157

$$M_y = \int_b^a x\,h(x)\,dx = \int_0^3 (3x^2 - x^3)\,dx$$

$M_y =$ ____

$$\left[x^3 - \frac{x^4}{4}\right]_0^3$$

$$\left[(3)^3 - \frac{(3)^4}{4}\right]$$

$$\left[27 - \frac{81}{4}\right]$$

$$\frac{27}{4}$$

158

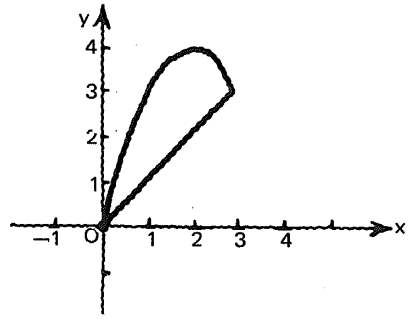
Como

$$M_y = \frac{27}{4}$$

y

$$A = \frac{9}{2}$$

$\bar{x} =$ ____ $=$ ____



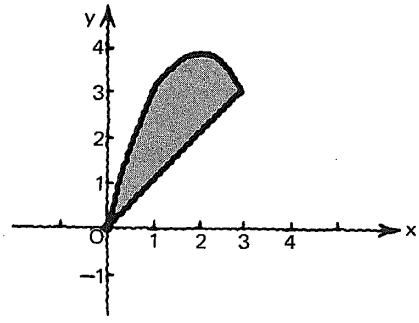
$$\frac{M_y}{A} = \frac{\frac{27}{4}}{\frac{9}{2}} = \frac{54}{36} = \frac{3}{2} = 1.5$$

159

Centro geométrico

CG = ____

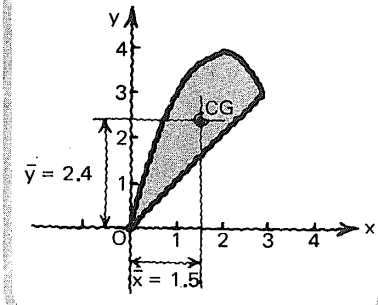
Indiquémoslo en la gráfica



$$\left(\frac{3}{2}, \frac{12}{5}\right)$$

o bien:

- (1.5, 2.4)

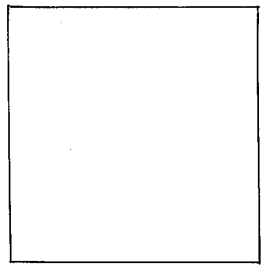


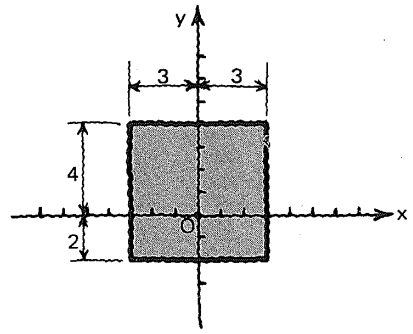
8.6.5.1

Práctica adicional
de
determinación del
centro geométrico
de una región plana dada,
totalmente contenida
en el semiplano superior
cuya frontera es el eje de las x
si se considera necesario.

160

Determinemos geométricamente,
el momento de la región
rectangular mostrada,
con respecto al eje de las x





$M_x =$ ⌊_____

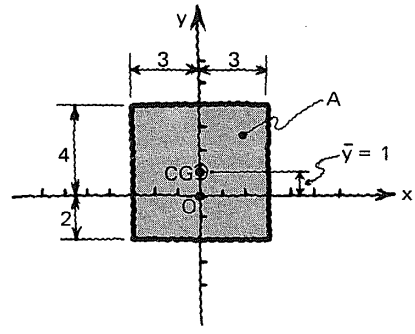
Respuesta
en el
cuadro siguiente.

Área A = 6 X 6 = 36

$\bar{y} = 1$

$M_x = 36 \times 1 = 36$

Estudiar un procedimiento
alternativo
en el cuadro siguiente



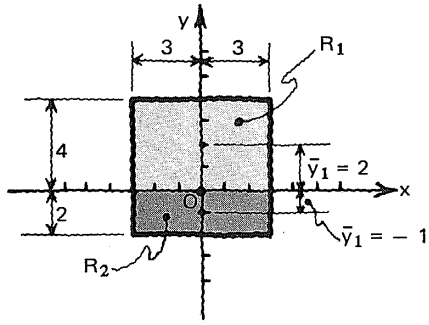
161

Consideramos dos rectángulos:

R_1 y R_2.

Para el rectángulo R_1, tenemos:

$M_{x_1} =$ ⌊_____⌋



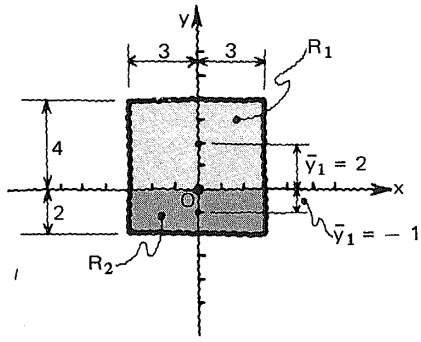
$\underbrace{24}_{A_1} \times \underbrace{2}_{\bar{y}_1} = 48$

162

Atención.

Para el rectángulo R_2:

$M_{x_2} =$ ⌊_____⌋



Mucha atención.

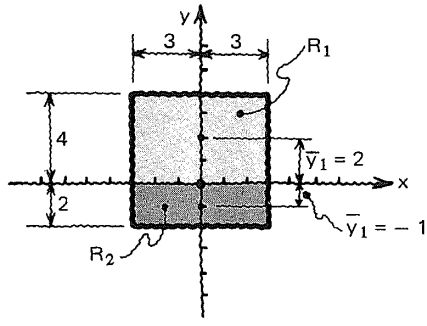
$\underbrace{-(-12)}_{A_2} \cdot \underbrace{(-1)}_{\bar{y}_2} = 12 \cdot (-1) = -12$

puesto que hemos considerado negativa el área de una figura que se encuentra abajo del eje de las x

163

Para el rectángulo total:

$M_x =$ ⌊_____⌋



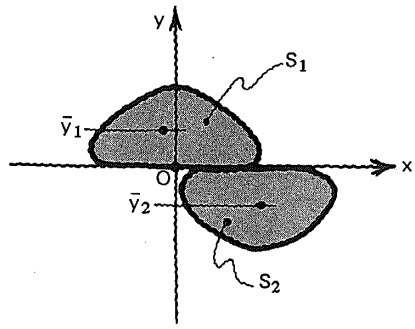
$M_{x_1} + M_{x_2} = 48 + (-12)$

$= 48 - 12$

$= 36$

164

Tomemos nota de esto
para la determinación
del momento de una región
plana
consideraremos
el valor absoluto
de su área



así

$$\left.\begin{aligned} M_{x_1} &= A_1 \cdot \bar{y}_1 \\ M_{x_2} &= -A_2 \cdot \bar{y}_2 \end{aligned}\right\} \quad M_x = |A| \cdot \bar{y} \leftarrow \text{en general}$$

se conserva el carácter negativo de $\bar{y}_2$

165

Podemos generalizar las expresiones que hemos
encontrado para el centro geométrico
de una región plana, en esta forma:

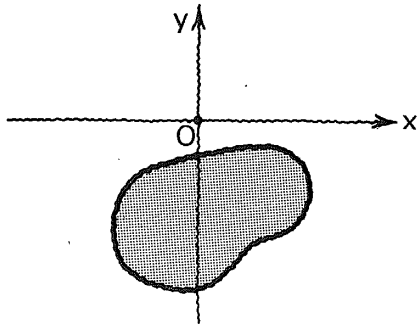
$$\bar{y} = \frac{\int_a^b |h(x)|\, k(x)\, dx}{\int_a^b |h(x)|\, dx}$$

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x\,|h(x)|\, dx}{\int_a^b |h(x)|\, dx}$$

sin la restricción anotada para h (x)
al pie del cuadro 143.

166

Ejemplo de una
figura completamente
contenida
en el semiplano inferior
limitado por el eje x.



167

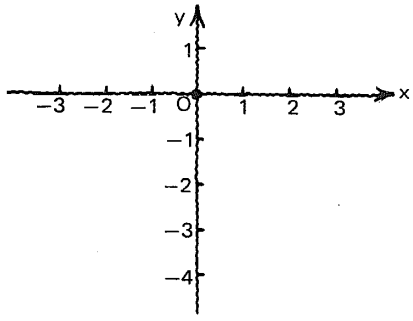
Determinar
el centro geométrico
de la región
limitada por
la curva

$$y = x^2 - 4$$

y el eje x.

168

Representación
gráfica.



Respuesta
en el
cuadro siguiente.

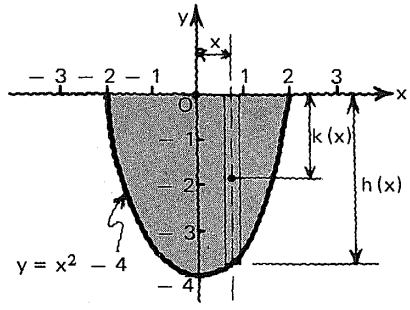
Calculemos
el área A
de acuerdo
con la expresión:

$$|A| = \int_b^a |h(x)|\,dx$$

siendo

$h(x) =$ _____

y $|h(x)| =$ _____



$h(x) = y = x^2 - 4$

$|h(x)| = -y = -(x^2 - 4)$
$= 4 - x^2$

puesto que y es negativa para
toda x del intervalo $[-2, 2]$

169

$$|A| = \int_a^b |h(x)|\,dx = \int_{\square}^{\square} (4 - x^2)\,dx$$

indicar los límites de integración.

Por simetría → $\square$

$$\begin{matrix} 2 \\ -2 \end{matrix}$$

$$2\int_0^2 (4 - x^2)\,dx$$

170

$$|A| = \int_a^b |h(x)|\,dx = 2\int_0^2 (4 - x^2)\,dx$$

$\square$

$\square$

$\square$

$|A| = \square$

$$2\left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_0^2$$

$$2\left[4(2) - \frac{(2)^3}{3}\right]$$

$$\frac{32}{3}$$

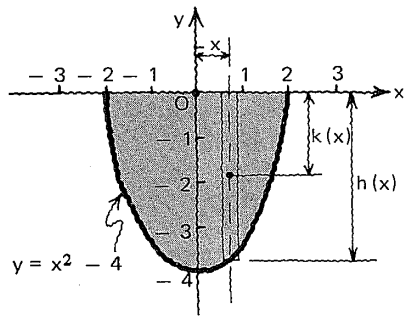
171

Expresión general

$M_x = \square$

$\square$

Expresión particular



$$\int_a^b |h(x)|\,|k(x)|\,dx$$

$$2\int_0^2 (4 - x^2)\,\frac{x^2 - 4}{2}\,dx$$

puesto que:

$$k(x) = \frac{h(x)}{2}$$

$$\int_0^2 (4 - x^2)\,(x^2 - 4)\,dx$$

$$\int_0^2 (-x^4 + 8x^2 - 16)\,dx$$

172

$$M_x = \int_a^b |h(x)|\, k(x)\, dx = \int_0^2 (-x^4 + 8x^2 - 16)\, dx$$

$M_x =$ ⌊ ⌋

$$\left[-\frac{x^5}{5} + \frac{8x^3}{3} - 16x \right]_0^2$$

$$\left[-\frac{(2)^5}{5} + \frac{8(2)^3}{3} - 16(2) \right]$$

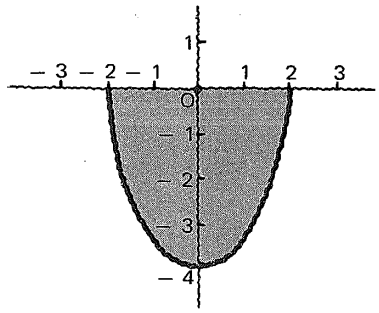
$$-\frac{256}{15}$$

173

$$|A| = \frac{32}{3}$$

$$M_x = -\frac{256}{15}$$

$\bar{y} =$ ⌊ ⌋



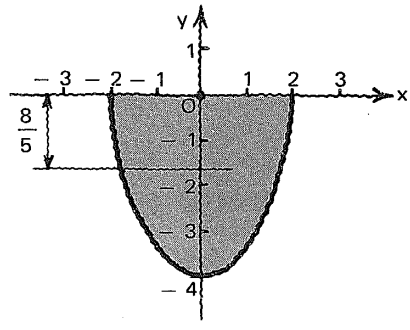
$$\frac{-\frac{256}{15}}{\frac{32}{3}} = -\frac{768}{480} = -\frac{8}{5}$$

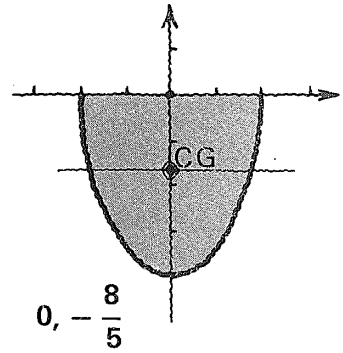
– 1.6

174

Con la información que tenemos podemos asegurar, intuitivamente, que el centro geométrico de la región considerada es el punto

⌊ ⌋





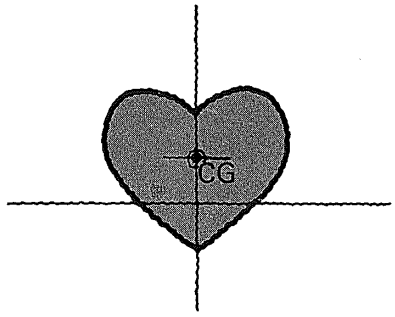
$0, -\frac{8}{5}$

175

Si una figura plana
tiene un

eje de simetría,

su centro geométrico
o centroide estará
en tal eje de simetría.

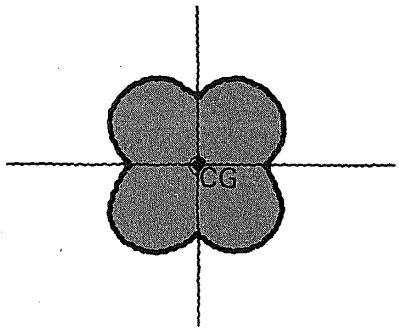


176

Si una figura plana
tiene un

centro de simetría

su centro geométrico
o
centroide
coincidirá
con el centro de simetría



8.6.5.2

Práctica adicional
de
determinación del
centro geométrico
de una región plana dada,
total o parcialmente
contenida en el
semiplano inferior,
si se considera necesario.

8.6.5

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *determinar* el centro geométrico de una región del plano de acuerdo con las expresiones:

$$\bar{y} = \frac{M_x}{|A|} = \frac{\int_a^b |h(x)|\, k(x)\, dx}{\int_a^b |h(x)|\, dx}$$

y

$$\bar{x} = \frac{M_y}{|A|} = \frac{\int_a^b x\,|h(x)|\, dx}{\int_a^b |h(x)|\, dx}$$

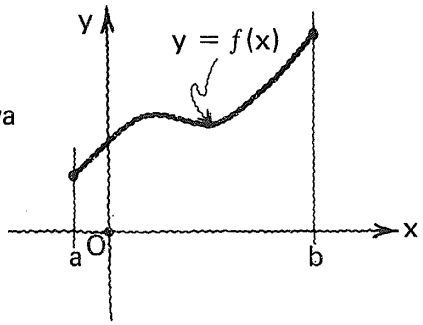
6.6

Temas adicionales de estudio

177

Longitud de un arco de curva

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$



8.6.6.1

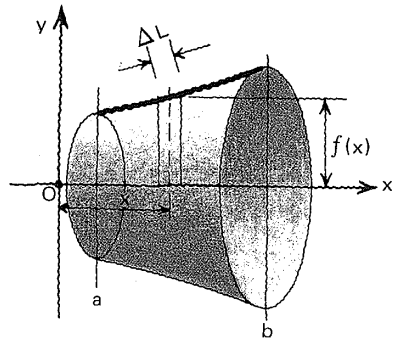
Práctica de determinación de la longitud de un arco de curva por medio de la expresión

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

si se considera necesario.

Área de una superficie de revolución

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$



8.6.6.2

Práctica de determinación del área de una superficie de revolución por medio de la fórmula

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

si se considera necesario.

8.6.6.

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *calcular* la longitud de un arco de curva aplicando la expresión

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

- *calcular* el área de una superficie, de revolución por medio de la fórmula:

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

Esta obra se terminó de imprimir
el día 28 de septiembre de 1984,
en los talleres de Litográfica Ingramex, S. A.,
Centeno núm. 162, loc. 1, Col. Granjas Esmeralda,
Deleg. Iztapalapa, 09810, México, D. F.,
se encuadernó en Ediciones Pegaso, S. A.,
Centeno núm. 162, loc. 4, Col. Granjas Esmeralda,
Deleg. Iztapalapa, 09810, México, D. F.,
se tiraron
3 000 ejemplares, más sobrantes de reposición

CO RIC KC 100